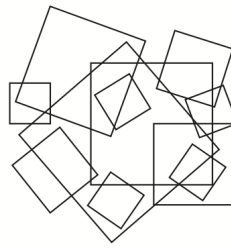


1. Les carrés



La première étape est d'identifier quel carré coupe un maximum d'autres carrés. Il s'agit du plus grand, qui coupe 8 autres carrés. On l'enlève et réitérons l'étape. Cette fois, il s'agit du deuxième plus grand, celui "droit" pour un regard dans le sens de la feuille. À ce moment, il reste deux zones dans lesquelles des carrés se coupent : en haut à gauche, et au milieu à droite. Dans les deux cas, enlever un carré suffit à séparer les carrés restants.

Il faut donc enlever **4 carrés** au minimum pour répondre au problème.

2. Les fléchettes

Avec la cible proposée, il faut réaliser qu'un nombre sera atteint avec une flèche de plus que ce nombre diminué de 9. Par exemple, pour faire 11, il faut trois flèches au minimum (une dans le 9, et deux dans le 1), soit une de plus que pour faire 2 (deux dans le 1). Si on connaît le tableau du nombre de flèches nécessaires pour les nombres de 1 à 9, alors la suite devient facile.

score	nombre de flèches
1	1
2	2
3	1
4	2
5	3
6	2
7	3
8	4
9	1

Ainsi, il faudra 2 flèches pour le 10, 3 pour le 11, etc. Le premier nombre à dépasser les 4 flèches sera le nombre $8 + 9 = 17$.

3. Les pièces du labyrinthe

Tous les chemins du labyrinthe passent par exactement 9 salles. On peut coder un chemin par une série de 5 "droite" et 3 "bas". En fonction du moment où l'on dit "bas", alors on collectionne plus de pièces que dans la salle précédente. BREF. La question est plutôt, comment faire 21 en sommant 9 (le nombre de salles traversées avec au moins 1 pièce)+a (le nombre de salles traversées avec au moins 2 pièces)+b (le nombre de salles avec au moins 3 pièces)+c (le nombre de salles avec au moins 4 pièces). De plus, vu le trajet, on a la relation

$$a > b > c \geq 1.$$

Ainsi, on peut énumérer les solutions :

(a;b;c)
 (8;3;1)
 (7;4;1)
 (7;3;2)
 (6;5;1)
 (6;4;2)
 (5;4;3)

Il y a donc **6 chemins**.

4. Un dé à 8 faces

Deux faces opposées sont à distance 3, où la distance est le nombre de faces (y compris la face d'arrivée) que l'on doit traverser pour aller d'une face à l'autre au minimum. Ici sur la patron, on voit que depuis le 2, on ne peut pas aller à la face grise en deux coups. Ce sera donc le **7 sur la face grise**.

Indice : Ici on peut aussi se dire qu'on ne pourrait pas savoir si c'est 3 ou 6 (respectivement 4 ou 5) car deux sommets opposés peuvent être intervertis. Cela réduit nos possibilités à 7 ou 8, soit une chance sur 2 !

5. Le partage de la tablette

Dans ce problème, il faut se demander quels pentaminos (figure avec 5 carrés) peuvent recouvrir la tablette. Par exemple la ligne droite composée de 5 carrés (une branche) satisfait la condition. À symétrie près, il y a 8 formes à tester. Au final, seules 3 fonctionnent.

6. Une lampe au plafond

Je n'ai pas la patience de faire des dessins. Mais, en résumé,

- Le problème est symétrique. Si par exemple on peut mettre une lampe dans un coin, on pourra la mettre dans les 4 coins.
- Il y a des zones qui sont obligatoirement couvertes par les grosses plaques.

Au final, la lampe peut être positionnée dans les quatre coins, ainsi qu'au milieu de chaque côté (et au centre du plafond). Cela fait 9 positions.

7. Les années suiveuses

De 12 à 2021 il y a 20 années suiveuses (la $n^{\text{ème}}$ étant l'année $n(n+1)$). Celle à deux chiffres sont celles de 12 à 89, celle à trois chiffres 910, puis celle à 4 chiffres de 1011 à 2021. Si on fait la somme, on obtient

$$S = \sum_{i=2}^{21} i + 10 \cdot \left(\sum_{i=1}^8 i \right) + 100 \cdot \left(\sum_{i=9}^{20} i \right).$$

Cela donne, en calculant chaque somme (ATTENTION : elles ne commencent pas toutes à 1) grâce à la formule $\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, on obtient

$$S = 230 + 10 \cdot 36 + 100 \cdot (210 - 36) = 590 + 17400 = \mathbf{17'990}.$$

8. Les pièces de puzzle

Rien à faire, il faut trier les types de pièces :

- Les coins :
 1. Creux + Creux
 2. Creux + Bosse
 3. Bosse + Bosse
- Les bords avec un Creux en face :
 1. Creux + Creux
 2. Creux + Bosse (Bosse + Creux peut être retourné sur Creux + Bosse)
 3. Bosse + Bosse
- Les bords avec une Bosse en face idem (3 possibilités)
- Les pièces normales :
 1. 4 Creux
 2. 3 Creux et 1 Bosse
 3. 2 Creux l'un en face de l'autre et 2 Bosses
 4. 2 Creux côte à côte et 2 Bosses
 5. 1 Creux et 3 Bosses
 6. 4 Bosses

En tout, cela nous donne **15 piles de pièces**.

9. *Toujours plus petit*

On remarque tout d'abord que la surface du losange est la moitié de celle du grand rectangle, et la surface du petit rectangle la moitié de celle du losange. En effet, en découpant astucieusement les grandes figures, on voit que le losange (respectivement le rectangle) coupe la figure en deux triangles de même aire. La surface du sol de départ est de 32 m^2 , soit 3200 dm^2 . On peut donc faire un tableau :

Figure	Surface
Rectangle 1	3200
Losange 1	1600
Rectangle 2	800
Losange 2	400
Rectangle 3	200
Losange 3	100
Rectangle 4	50
Losange 4	25
Rectangle 5	12,5
Losange 5	6,25
Rectangle 6	3,125
Losange 6	1,5625
Rectangle 7	0,78125

Il a donc en tout dessiné **6 losanges**.

10. *Huit diviseurs*

Si un nombre n se décompose en facteurs premiers de la manière suivante : $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, alors il aura exactement $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$ diviseurs. Par exemple 12 se décompose $2^2 \cdot 3^1$ et possède donc $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$ diviseurs.

Comme huit peut être obtenu de trois manières comme produit ($8, 4 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 2$), alors il y a 3 nombres potentiellement minimum (en prenant les plus petits premiers possibles) :

- $2^7 = 128$
- $2^3 \cdot 3^1 = 24$
- $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$

Le plus petit est donc **24**.

11. *Ficelle cadeau*

Il faut d'abord décomposer 225. Cela donne $225 = 3^2 \cdot 5^2$. Comme les côtés de la boîte ne peuvent pas être 1, cela donne comme possibilités

1. 3;3;25
2. 5;5;9
3. 3;5;15

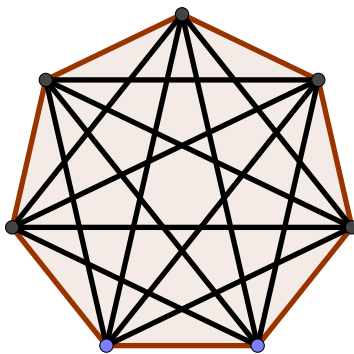
La possibilité numéro 3 doit être éliminée car il faut qu'une face soit un carré. Il nous reste plus qu'à calculer la longueur du ruban, qui est égale à 4 fois le côté du carré plus 4 fois la hauteur de la boîte, auxquels on rajoute la longueur du ruban.

1. $4 \cdot 3 + 4 \cdot 25 + 25 = 137$
2. $4 \cdot 5 + 4 \cdot 9 + 25 = 81$

Le ruban mesure donc **81 cm ou 137 cm**. (2 solutions)

12. Diagonales

Voici la figure décrivant la situation :



En étant rigoureux, on trouve 50 régions.

La formule générale pour un n -gone régulier est donnée par un théorème de Poonen et Rubinstein. Dans le cas de l'heptagone, comme il n'y a pas de points d'intersection des diagonales commun à 3 diagonales, le nombre de régions est

$$R(n) = (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24)/24$$

En remplaçant n par 7, on trouve qu'il y a **50 régions**.

13. Jouer à la loterie

Alix utilise 10 chiffres, chacun une fois. Cela signifie que sur les 6 nombres, il y aura 2 nombres plus petits que 10 (des unités), un de la forme $1x$, un $2x$, un $3x$ et un $4x$.

Cela signifie que les chiffres 1, 2, 3 et 4 sont déjà pris. Cela oblige le joueur à choisir pour le $4x$ le nombre 40.

Pour les 5 restants, il reste à choisir les chiffres 5, 6, 7, 8 et 9. On a 5 choix pour le $1x$, puis 4 pour le $2x$, 3 pour le $3x$ et les deux derniers nombres seront forcés.

Le nombre de grilles est donc $5 \cdot 4 \cdot 3$ qui donne **60 grilles**.

14. Partage équitable

Pour qu'on puisse séparer l'ensemble en deux sous-ensembles dont la somme des éléments soit égale, il suffit que l'ensemble de départ aie une somme de ses éléments paire, et cela est une condition nécessaire et suffisante. En effet, une manière de séparer et de partir du plus grand et de la prendre tant qu'on ne dépasse pas la moitié. Par exemple si l'ensemble est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ alors la somme de ses éléments est 28. Chaque sous-ensemble aura donc une somme égale à 14. Tant que le plus grand nombre à choisir est plus petit que la somme restante, on le choisit. Ici on choisit donc 7, puis 6 et enfin il reste 1.

BREF, Il faut donc uniquement que la somme soit paire, cela est le cas quand $n \equiv 0 \pmod{4}$ ou $n \equiv 3 \pmod{4}$, à nouveau à cause de la formule $\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Les n possibles sont donc : **3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20**. Il y a 10 solutions.

15. Le robot

Travaillons sur le nombre 2080. C'est $20 \cdot 104$, mais aussi $40 \cdot 52$ ou encore $32 \cdot 65$. C'est cette décomposition qui nous intéresse.

$$2080 = \frac{64 \cdot 65}{2} = \sum_{i=1}^{64} i.$$

Cela signifie que le robot finira son chemin dans un coin. Lequel ? Comme $64 = 16 \cdot 4$, alors le robot finira dans un coin sud ouest, après avoir fait 16 "tours".

Après chaque tour, le robot a fait 2 pas (donc 1m) vers l'ouest et 2 pas (1m) vers le sud. Après 16 tours, il a donc fait 16m vers l'ouest et 16 m vers le sud. Sa distance au point central est donc, par pythagore, $16\sqrt{2} = 16 \cdot 1,414 = 22,624m$.

Comme la réponse est demandée au cm, arrondi au plus proche, on a que le robot est à **2262 cm** de son point de départ.

16. Le carré kryptonien

Ne connaissant pas la base, le plus simple est de comparer entre elles les alignements contenant le même nombre de "dizaines". Ici, les lignes/colonnes contenant 2 dizaines sont :

- L1
- L2
- C2
- C3
- D1 (celle d'en haut gauche à en bas droite)
- D2

Dans cette ensemble, on peut donc s'intéresser qu'aux unités des nombres. Soit x le plus petit des trois entiers consécutifs. On obtient :

- L1 : $(x + 2) + (x + 1) + y$
- L2 : $9 + 0 + x$
- C2 : $(x + 1) + 0 + z$
- C3 : $y + x + t$
- D1 : $(x + 2) + 0 + t$
- D2 : $u + 0 + y$

Toutes ces lignes sont égales, ce qui nous donne 5 équations à 5 inconnues.

- En comparant L1 avec L2 on trouve que $y = 6 - x$
- En comparant L2 avec C2 on trouve que $z = 8$
- En comparant L2 avec D1 on trouve que $t = 7$
- C3 nous donne à présent que la somme sur une ligne est 13. En reprenant L2 on trouve $x = 4$, donc $y = 2$
- D2 nous donne $u = 11$

Nous connaissons maintenant toutes les unités, il reste à trouver la base. Pour cela, on compare deux alignements qui n'ont pas le même nombre de dizaines. En prenant par exemple C1 et C2, et soit y la base (pas le même y que avant), on trouve

$$(y + 6) + 9 + 11 = 5 + y + (y + 8)$$

$$y + 26 = 2y + 13$$

Soit encore $y = 13$. Il ne nous reste plus qu'à sommer tous les nombres, mais pour cela rappelons nous que la somme sur un alignement est $2y + 13 = 39$. Donc notre réponse finale est $3 \cdot 39$, soit **117**.

Indice : Notons que le résultat coïncide avec la "logique" des nombres. De plus, on aurait pu réaliser que la base était obligatoirement une base 10 minimum, et que cela obligeait la dizaine à être le nombre 1, cela nous mettant à nouveau sur la piste de la construction calligraphique logique des nombres.

17. Quatre petits cubes

On remarque d'abord que chaque petit cube a quatre faces peintes sur les 6, et les deux non peintes sont adjacentes. Au final, on se demande la probabilité que 12 faces soient peintes après rassemblement, soit 4 faces non peintes. En notant (a,b,c,d) où a est le nombre de faces non peintes visibles sur le cube arrière droite, b sur l'arrière gauche, etc, les possibilités sont les suivantes :

- $(1,1,1,1)$
- $(1,1,2,0)$ et tous ses arrangements, soit 12 façons
- $(2,2,0,0)$ et tous ses arrangements, soit 6 façons

Un cube a , en tout, 12 arrangements possibles (non peints/peints). Parmi ces arrangements, 6 montrent une face non peinte, 1 montre que des faces peintes (donc 0 non peintes) et 5 montre deux faces non peintes.

Le nombre de combinaisons favorables est donc

$$6^4 + 12 \cdot 6^2 \cdot 1 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 \cdot 1^2 = 3606$$

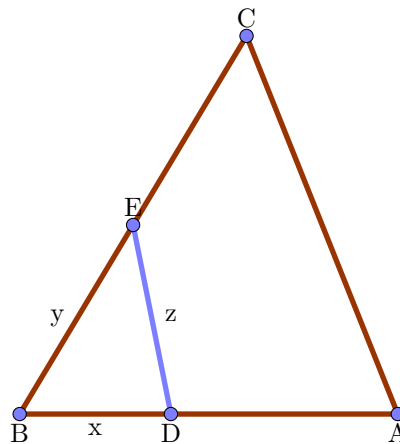
Le nombre de combinaisons possibles est

$$12^4 = 20'736$$

La probabilité est donc

$$\frac{3606}{20736} = \frac{601}{3456}$$

18. Le partage du jardin



Soit $x = BD$, $y = BE$ et $z = DE$. Alors l'égalité des périmètres des deux terrains est donnée par

$$x + y + z = (36 - x) + z + (60 - y) + 38$$

Autrement dit après développement :

$$x + y = 67$$

Pour ce qui est de l'aire des terrains, utilisons plutôt le fait que $Aire(BDE) = \frac{1}{2} Aire(ABC)$. Ainsi, par la formule de l'aire, avec β l'angle en B,

$$\frac{1}{2}xy \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 60 \cdot \sin(\beta) \right)$$

En simplifiant, puis en substituant y par $67 - x$, on obtient

$$x^2 - 67x + 1080 = 0$$

soit encore

$$(x - 27)(x - 40) = 0.$$

Comme $x \leq 36$ car D est sur le segment BA, alors nous avons une solution : $BD = 27$ qui donne $BE = 40$.