

1. Les neuf jetons

Pour débiter, on choisit au hasard 3 jetons qui respectent la consigne (par exemple 5, 1 et 9). Ensuite on regarde deux numéros ensemble et on essaye de les déplacer en gardant le 3^{ème}. Dans notre cas, on peut remplacer 5 et 1 par 4 et 6 afin d'avoir une somme plus grande. Cela nous donne finalement la somme $4 + 6 + 9 = 19$ qui est la réponse.

2. Le fil d'Ariane

Pour ne pas avoir deux fils qui se croisent, on est obligé de partir d'un côté (en haut ou en bas), revenir en arrière par la zone centrale et de retourner vers la sortie de l'autre côté.

Cela fait que le deuxième jeton est obligatoirement le numéro 7, le quatrième le numéro 4 et le sixième le numéro 1.

La réponse à la question est donc **4 et 1**

3. De 1 à 7

Les nombres qu'il nous reste à placer ont une somme totale de 24 ($2 + 4 + 5 + 6 + 7$). 11 iront dans la colonne avec le numéro 1 et 11 dans la ligne horizontale. Il reste donc le numéro **2**.

4. Le nombre de Mathilde

Comme le nombre de Mathilde est un nombre à deux chiffres le plus petit possible, il faut essayer de prendre les plus petits chiffres possibles.

On ne peut pas avoir de chiffre 1 car sinon la multiplication des deux chiffres est forcément plus petite que le double de la somme ($1 \cdot a < 2(a + 1)$).

Pareil avec le chiffre 2 : $2 \cdot a < 2(a + 1)$.

Avec un chiffre 3, on y arrive, car $3 \cdot 6 = 18 = 2 \cdot (3 + 6)$. **36** est donc le plus petit nombre possible.

5. Les boules de pétanque

Parmi tous les points de contact, il y en a de deux types : Ceux entre deux boules du même étage, et ceux entre deux boules d'étages différents.

- Entre les boules de l'étage du bas, il y a 12 points de contact
- Entre les boules de l'étage du milieu, il y a 4 points de contact
- Sous la boule tout en haut, il y a 4 points de contact
- Sous chacune des 4 boules de l'étage du milieu, il y a aussi 4 points de contact, et donc 16 points en tout.

Au total, cela fait **36** points de contact.

6. La pyramide de Mathilde

Si on compte les premiers étages de la pyramide, on peut trouver une règle : Si le numéro d'étage est impair, alors il y a autant de numéros impairs que le numéro de l'étage. Si le numéro de l'étage est pair, alors il y en a un de moins.

Etage 1 : 1 numéro impair. Etage 2 : Aussi. Etage 3 : 3 numéros impairs. Etage 4 : Aussi. Etc... A l'étage 22, il y aura donc **21** numéros impairs.

7. Les cartes de Mathias

Pour former une courbe fermée, il faudra forcément avoir à un endroit dans la figure 2 cartes collées qui donnent la forme $\cap$, 2 qui donnent la forme $\cup$, 2 la forme $\subset$ et 2 la forme $\supset$. Si une carte fait partie de deux de ses formes en même temps (par exemple $\cap$ et $\supset$, alors on sera obligé de former un cercle et donc d'utiliser 4 cartes.

Pour utiliser le moins de cartes possible, nous devons donc relier les 4 groupes de 2 cartes avec 4 nouvelles cartes.

Cela donne donc **12 cartes** en tout. On arrive facilement à faire le dessin, qui est donc minimal.

8. *Trois carrés sur un rectangle*

Si on trace la diagonale du rectangle formé par les trois carrés blancs, on voit que cette diagonale coupe le rectangle gris en deux rectangle de même taille. On voit alors que l'aire des 3 carrés blancs correspond à la moitié de l'aire du grand rectangle gris. On fait donc le calcul $(3 * 22) * 2 = \mathbf{132 \text{ cm}^2}$.

9. *Piquets et enclos*

Dans notre cercle, on peut mettre 5 piquets alignés (sur un diamètre). En essayant de mettre un maximum d'enclos, on forme des hexagones. En tout on arrive à faire 24 triangles, qui ont besoin en tout de **19 piquets**. (une rangée de 3, une de 4, une de 5 et de nouveau une de 4 et de 3).

10. *Les 8 cartes*

La première étape pour résoudre cet exercice est de faire les paires de nombres qui vont ensemble. En faisant cela, on observe que le 2 ne peut aller qu'à côté du 3 et du 5, et le 8 également. Cela signifie que un des deux nombres devra être à la fin de la liste. La fin sera donc soit :

- ...5832
- ...5238
- ...3852
- ...3258

Pour les deux premières possibilités et en remontant, on a forcément 14765 ... car 4 et 7 ne vont pas à côté du 5.

Pour les deux dernières possibilités, on a forcément 16743

Cela nous donne nos **4 solutions**

11. *La somme de l'année*

Commençons par faire la somme des nombres jusqu'à 100 (comme si on mettait que des +)

$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Chaque fois qu'on transforme un + en -, on enlève deux fois le nombre à la somme. Si par exemple on met un - devant le 100, alors la somme $1 + 2 + \dots + 99 - 100 = 5050 - 2 \cdot 100 = 1850$.

Afin de mettre le moins de signes - possible, il faut les mettre devant les plus grands nombres (100, 99, ...). Un calcul rapide nous fait trouver que $1 + 2 + \dots + 84 - 85 - \dots - 100 = 2090$. Pour arriver à 2022, on doit donc mettre le numéro 34 et les numéros 85 à 100 en négatif et les autres en positifs.

Pour que le premier signe - apparaisse le plus tard possible, on peut changer un peu la solution précédente :

- Solution de base : 100 / ... / 85 et 34 en négatif
- Solution 1 : 99 / ... / 84 et 50 en négatif (16 nombres perdent 1 et le 34 gagne 16)
- Solution 2 : 98 / ... / 83 et 66 en négatif (idem)
- Solution 3 : 97 / ... / 82 et 82 en négatif (idem)

Mais la solution 3 n'est pas possible car il faudrait avoir deux fois le nombre 82. Il est facile de trouver une solution où le plus petit nombre avec un - est **81**.

12. Les billets de loterie

Au maximum, le numéro à Mathias est 09876. Ainsi, au maximum le numéro à Mathilde est 19752. Comme le 9 est déjà pris, on est sûr que le numéro à Mathilde est **18xxx**.

Les possibilités pour les centaines du numéro à Mathias sont 2 et 3 (0 et 1 sont déjà pris, et 4 ou plus donnerait soit une retenue, soit une centaine chez Mathilde déjà prise). Le numéro de Mathilde est pair et le 5 doit forcément faire partie du numéro à Mathilde. Faisons les possibilités :

- 092xx et 18xx4.
Cela oblige l'unité de Mathias à être 7, la centaine de Mathilde à être 5. Avec les 3 et 6 qui restent on trouve les nombres 09267 et **18534** qui est notre 1^{ère} solution.
- 092xx et 18xx6.
Cela oblige l'unité de Mathias à être 3. Avec les nombre qu'il nous reste, on trouve la solution 09273 et **18546**.
- 093xx et 18xx2.
Cela oblige l'unité de Mathias à être 6, et la centaine de Mathilde à être 7. Il n'y a pas de solution.
- 093xx et 18xx4.
En se rappelant que le 5 doit faire partie du numéro à Mathilde, on doit le placer à la position des dizaines. Cela nous oblige à avoir une retenue, et donc un 7 en unité du nombre de Mathias. La solution est 09327 avec **18654**
- 093xx et 18xx6. 3 et 8 étant pris, il n'y a pas de solution.

On a donc nos trois solutions.

13. Le pavage de Dane

Il y a plusieurs façons possible pour résoudre cet exercice. La façon classique est de faire une figure avec des sommets posés aux centres des hexagones (par exemple un triangle), et de compter le nombre de figures de chaque dans cette zone. Présentons une autre solution :

Dans un cercle autour d'un hexagone il y a :

- 6 triangles
- 6 carrés
- 1 hexagone

Chaque triangle appartient à 3 "cercles", chaque carré à 2 cercles et chaque hexagone à un seul. Ainsi, en divisant le nombre d'hexagones par la somme du nombre de chaque figure, rationné par le nombre d'appartenance, on obtient la réponse :

- 6 triangles ; chacun dans 3 cercles, donc en moyenne 2 par cercles
- 6 carrés ; chacun dans 2 cercles, donc en moyenne 3 par cercles
- 1 hexagone ; chacun dans 1 cercles, donc en moyenne 1 par cercles

La solution est donc **1/6**.

14. *Léon et Noel*

Quand on additionne LEON + NOEL, on trouve $110(E + O) + 1001(N + L)$. Cette somme doit être un multiple de 13. Comme 13 est premier, que 1001 est un multiple de 13 mais que 110 ne l'est pas, alors forcément $E + O$ est un multiple de 13, donc $E + O = 13$.

N et L étant paires, cela nous donne 36 cas à traiter. En travaillant méthodiquement et modulo 7, on trouve les 4 solutions **8764 ; 2674 ; 2856 ; 8946**.

15. *Les étoiles de l'année*

Pour que le polygone soit complet et qu'il ne soit pas en plusieurs morceaux (comme les deux triangles de l'exemple), il faut que la distance entre les sommets reliés ne soit pas un diviseur de 2022. En effet, si l'écart entre les sommets divise 2022, alors on retournera au point de départ avant d'avoir parcouru 2022 arrêtes (histoire de congruence).

Le nombre de nombres premiers avec 2022 et inférieur à 2022 est donné par l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$. Pour la calculer, on a la formule suivante :

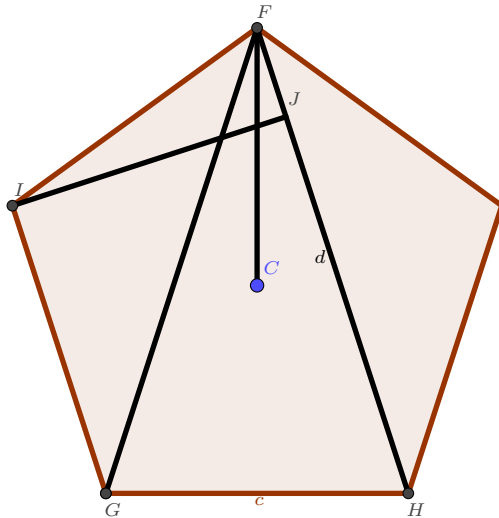
$$\text{si } n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i} \text{ alors } \varphi(n) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1)p_i^{k_i-1}$$

Comme $2022 = 1011 \cdot 2 = 337 \cdot 3 \cdot 2$, alors $\varphi(2022) = 336 \cdot 2 = 772$.

En pensant que deux écarts donnent toujours la même figure (2 et 7 ou 4 et 5 dans l'exemple de 9), et en pensant à enlever la figure régulière, on trouve la réponse $\frac{772}{2} - 1 = \mathbf{335}$.

16. Un triangle sur un pentagone

Pour avoir un ratio maximum, il faut le plus grand triangle possible. En faisant varier un par un les sommets afin d'optimiser l'aire, on trouve rapidement que le triangle avec la plus grande aire possible a un côté étant une grande diagonale et le troisième sommet sur le côté parallèle du pentagone. Pour se simplifier la vie, disons que le triangle a ses sommets sur trois sommets du pentagone.



Le triangle d'aire maximale sur le dessin est le triangle FGH , dont le côté FH est parallèle au côté du pentagone GI .

Soit c la longueur d'un côté du pentagone et d la longueur FH . L'aire du triangle FGH est calculé en faisant $\frac{d \cdot JI}{2}$, car JI est la hauteur du triangle. L'aire des deux triangles en dehors (FGI) est quant à elle donnée par $\frac{c \cdot JI}{2}$. Ainsi, le ratio de l'aire du triangle sur l'aire totale est donné par

$$\frac{\frac{d \cdot JI}{2}}{\frac{d \cdot JI}{2} + 2 \cdot \frac{c \cdot JI}{2}} = \frac{d}{d + 2c}.$$

Essayons donc d'exprimer d comme multiple de c de deux façons différentes (une seule façon suffit si on connaît $\cos(72)$ par coeur).

La première consiste à regarder le triangle FGH . Pour trouver l'angle $\widehat{FGH}$, il faut d'abord trouver l'angle $\widehat{GFC}$. Comme le triangle GFC est isocèle en C , et que l'angle $\widehat{FCG}$ vaut $\frac{2}{5} \cdot 360 = 144$, alors l'angle $\widehat{GFC}$ vaut 18 degrés. En observant que le triangle FGH est isocèle, on trouve que $\widehat{FGH} = 72$. Comme

$$\cos(\widehat{FGH}) = \frac{c/2}{d},$$

on trouve que $\frac{c}{d} = 2 \cos(72)$.

La deuxième façon est de constater que FH est parallèle IG . En traçant une perpendiculaire à FH passant par G et par I (celle par I est représentée sur le dessin), on coupe d en trois morceaux : un de longueur c et deux autres de même longueur. Celle-ci est donnée grâce au sinus dans le petit triangle IFJ . On trouve que $\widehat{FIJ} = 108 - 90 = 18$ et donc que $FJ = c \sin(18)$. Enfin cela donne $d = c(1 + 2 \sin(18))$. En notant que $\cos(72) = \sin(18)$, on trouve la relation

$$\frac{c}{d} = 2 \cos(72) = \frac{1}{(1 + 2 \cos(72))}.$$

En posant $\cos(72) = x$ et en résolvant l'équation, on trouve comme solution $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

En reprenant $d = c(1 + 2 \sin(18))$, on trouve $d = c(1 + 2 \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot c$. Calculons enfin le ration

demandé, soit $\frac{d}{d + 2c} = 1 - \frac{2c}{d + 2c}$ en remplaçant d par $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot c$:

$$1 - \frac{2c}{\frac{\sqrt{5}+5}{2}c} = 1 - \frac{4}{\sqrt{5} + 5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 5} = \frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 5)}{(\sqrt{5} + 5)(\sqrt{5} - 5)} = \frac{-4\sqrt{5}}{-20} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,447$$

17. Les polygones de Mathilde

Soit α_n l'angle au sommet d'un polygone régulier à n côtés. Alors on a la formule

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180}{n} = 180 - \frac{2 \cdot 180}{n}.$$

En radians, cela donne

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot \pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Comme on nous dit qu'il y a 3 polygones, tous avec un nombre de côtés différent, alors on a l'égalité :

$$2\pi = \alpha_{n_1} + \alpha_{n_2} + \alpha_{n_3} = \pi - \frac{2\pi}{n_1} + \pi - \frac{2\pi}{n_2} + \pi - \frac{2\pi}{n_3}.$$

En simplifiant, on trouve

$$1 = \frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3}; \text{ soit encore } \frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

On peut supposer que $n_1 < n_2 < n_3$. Comme $1/2 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{3}{n_1}$, on doit avoir $n_1 < 6$. Donc $n_1 = 3, 4$ ou 5 .

— **Si $n_1 = 3$**

Alors on a $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$, soit $\frac{1}{6} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$. Par un argument similaire, on trouve $6 < n_2 < 12$.

Réessayons :

- Si $n_2 = 7$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ qui nous donnera la première solution.
- Si $n_2 = 8$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ qui nous donnera la deuxième solution.
- Si $n_2 = 9$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ qui nous donnera la troisième solution.
- Si $n_2 = 10$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ qui nous donnera la quatrième solution.
- Si $n_2 = 11$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{11} \neq \frac{1}{\dots}$ qui nous donnera pas de solutions.

— **Si $n_1 = 4$**

Alors on a $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$, soit $\frac{1}{4} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$. Par un argument similaire, on trouve $4 < n_2 < 8$.

Réessayons :

- Si $n_2 = 5$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ qui nous donnera la cinquième solution.
- Si $n_2 = 6$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ qui nous donnera la sixième solution.
- Si $n_2 = 7$, alors $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \neq \frac{1}{\dots}$ qui nous donnera pas de solutions.

— **Enfin si $n_1 = 5$**

Alors on a $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$, soit $\frac{3}{10} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$. Or, on a au maximum $n_2 = 6$ et $n_3 = 7$ ce qui nous donnerait $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42} < \frac{3}{10}$. Il n'y a donc plus de solutions.

18. Un triangle très entier

Soit a, b, c les côtés du triangle et p le demi périmètre ($p = \frac{a+b+c}{2}$). Rappelons la formule de Héron :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Comme on doit avoir que l'aire est égale au périmètre ($2p$), on peut remplacer A dans la formule de Héron et mettre le tout au carré :

$$4p^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ soit } 4p = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Si on fait la somme des trois termes de droite de l'égalité, on trouve $(p-a) + (p-b) + (p-c) = p$. Enfin, chaque parenthèse est un nombre entier car p en est un.¹

En résumé, on cherche trois nombres entiers dont la somme fait p et le produit $4p$.

En étudiant le cas optimal (triangle équilatéral), on trouve que p ne peut pas être plus petit que 11. De plus, p ne peut pas être premier, sinon un des $(p-i)$ devrait être un multiple de p . Appelons $p-a = x$, $p-b = y$ et $p-c = z$ et cherchons :

- Si $p = 12$, on trouve la solution $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ (qui est un triangle rectangle). **S = 24.**
- Si $p = 14$, il faut que $x = 7$ (seul multiple de 7 inférieur à 14) et donc que $y + z = 7$ et $y \cdot z = 8$. Impossible.
- Si $p = 15$, il faut $(x; y; z) = (10; 3; 2)$. C'est un triangle rectangle. **S = 30.**
- Si $p = 16$, il faut que des multiples de 2. Impossible.
- Si $p = 18$, il faut $(x; y; z) = (9; 8; 1)$. **S = 36.** A noter qu'à partir de ce moment, on ne pourra plus utiliser le nombre $p/2$ dans nos x, y, z , et donc les $p = 2 \cdot \alpha$ avec α un nombre premier ne seront plus possible.
- Si $p = 20$, on ne trouve pas de solutions.
- Si $p = 21$, il faut $(x; y; z) = (14; 6; 1)$. **S = 42.**
- Si $p = 22$, impossible par l'argument cité au $p = 18$.
- Si $p = 24$, le plus grand x qu'on peut choisir est 16. Il resterait $y + z = 8$ et $y \cdot z = 6$. Impossible.
- Si $p = 25$, alors il faudra deux multiples de 5, et donc le troisième le sera aussi. Contradiction.
- Si $p = 28$, il faut absolument utilise $x = 7$. Reste donc $y + z = 21$ et $y \cdot z = 16$. Impossible.
- Si $p = 30$, on trouve $(x; y; z) = (24; 5; 1)$. **S = 60.**

On se convainc rapidement que ce sera la dernière solution (y et z étant trop petits, la solution suivante serait $(y; z) = (4; 1)$ mais ça ne jouerait pas avec le produit, et cela donnerait dans l'imaginaire un triangle infini de côté $4, \infty, \infty$). On a donc un total de 5 solutions.

1. En effet une façon d'en être convaincu est que si p n'est pas entier, alors ce serait un nombre de la forme $n/2$, et avec l'égalité de la formule de Héron, nous aurions un nombre entier à gauche mais pas à droite.