18 - LE NOMBRE D'ARMAND

On cherche M tel que $M \le n(\sqrt{2}n - E(\sqrt{2}n)) = f(n)$

f(n) est minimale si $\sqrt{2}n - E(\sqrt{2}n)$ est minimale (pourquoi ? le terme minimale est abusif, en fait, f(n) admet atteint un minimum local quand le terme est minimale).
En élevant chaque terme au carré on a :
f(n) est minimale si $2n^2 - E(\sqrt{2}n)^2 = 1$ (1) (pourquoi =1 ? parce que chacun des deux termes est un entier naturel, donc leur différence est aussi un entier naturel et le plus petit entier naturel supérieur à zéro est un.)

$$2n^2 - E(\sqrt{2}n)^2 = 1$$

soit $E(\sqrt{2}n)^2 = 1 - 2n^2$ (2)

$$E(\sqrt{2}n) = \sqrt{1 - 2n^2}$$

De (1) on déduit $2n^2 - E(\sqrt{2}n)^2 = (\sqrt{2}n + E(\sqrt{2}n))(\sqrt{2}n - E(\sqrt{2}n) = 1$

Donc $M \le n(\sqrt{2}n - E(\sqrt{2}n)) = \dfrac{n}{\sqrt{2}n + E(\sqrt{2}n)}$

Avec (2) on a $M \le \dfrac{n}{\sqrt{2}n + \sqrt{2n^2 - 1}} = \dfrac{n}{n(\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2n^2 - 1}}{n})}$

$$M \le \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{2n^2 - 1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{n^2 - \frac{1}{2}}{n^2}}}$$

Pour n qui tend vers l'infini le terme $\sqrt{\dfrac{n^2 - \frac{1}{2}}{n^2}}$ tend vers 1

Ainsi $M \le \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$