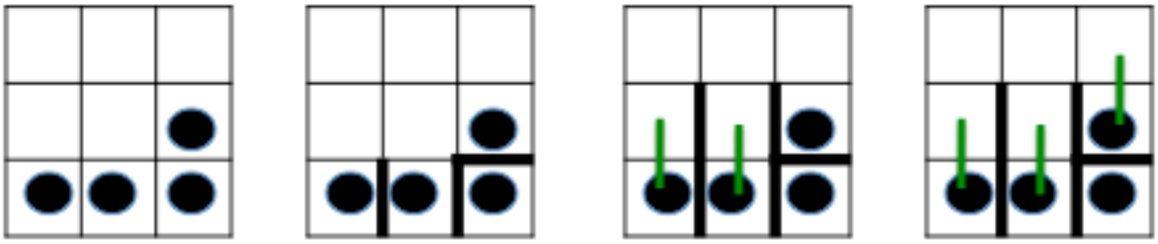
FINALE du 25^e^ Championnat   26 août 2011

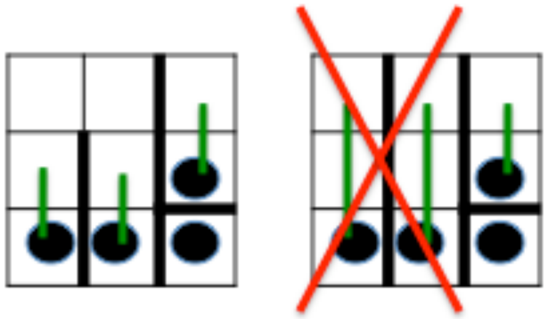
Solutions rédigées par le jury de la FFJM

1 Le juste partage

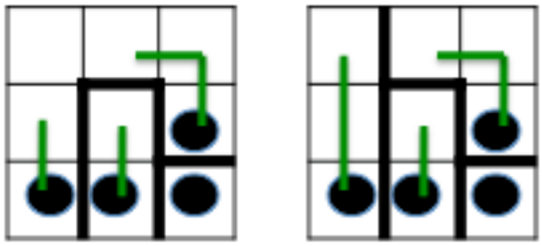
Deux cerises étant dans deux parts différentes, on trace leur séparation.
Il y a une part avec une case, les autres parts ont au moins deux cases :



Si on teste une part de deux cases en haut à droite, on force deux parts de trois cases identiques :



Donc on doit prolonger la part testée vers la gauche.
Cela force une part de deux cases.
Et la part à gauche doit avoir au moins trois cases :



2 Les boules de Boule

Dans la boite tout à droite :
- il ne peut pas y avoir 0 boule blanche, car il ne pourrait pas y en avoir moins dans celle tout à gauche ;
- il ne peut pas y avoir 1 boule blanche, car il y aurait 1 boule noire et le nombre écrit ne serait pas faux ;
- donc il y a 2 boules blanches et 0 boule noire.

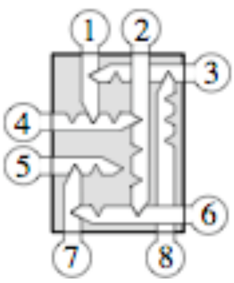
Dans la boite tout à gauche :
- il y a moins de 2 boules blanches ;
- il ne peut pas y avoir 0 boule blanche, car il y aurait 2 boules noires et le nombre écrit ne serait pas faux ;
- donc il y a 1 boule blanche et 1 boule noire.

Il reste 1 boule blanche qui ne peut pas être dans la 3ème boite à partir de la gauche, car il y aurait 1 boule noire et le nombre écrit ne serait pas faux.

Donc il y a 1 boule blanche et 1 boule noire dans la 2ème boite à partir de la gauche, et il y a 0 boule blanche et 2 boules noires dans la 3ème boite à partir de la gauche.

La réponse est 1120.

3 Les clefs du père Fouras



8 doit être sortie avant 3, 3 avant 1, 1 avant 4, 4 avant 2, 2 avant 6, 6 avant 7, 7 avant 5.

La réponse est 83142675.

4 Le timbrage

Les timbres de 1, 3 et 9 centimes permettent d'obtenir au maximum (2x1) + (2x3) + (2x9) = 2 + 6 + 18 = 26 centimes.
Pour que l'on puisse obtenir 27 centimes, la valeur du quatrième timbre doit être au plus 27 centimes.
Pour que l'on puisse obtenir 80 centimes, la valeur du quatrième timbre doit être au moins (80-26) : 2 = 54 : 2 = 27 centimes.
La **valeur du quatrième timbre** est **27 centimes**.

58 – 26 = 32 supérieur à 27. On doit coller deux exemplaires du quatrième timbre.
Il manque 58 – (2x27) = 58 – 54 = 4 centimes, que l'on ne peut obtenir qu'avec un timbre de 3 centimes et un autre de 1 centime.

La réponse est **1102** (2011 à l'envers).

5 Devine-pièce

Comme on peut lire simultanément 6, 1, 4 et 3, les faces numérotées 1, 3, 4 et 6 appartiennent respectivement aux différentes pièces A, B, C et D.

Comme on peut lire simultanément 1, 3, 5 et 7, les pièces C et D ont leurs autres faces (différentes de celles numérotées respectivement 4 et 6) numérotées 5 et 7.
Et A et B ont leurs autres faces (différentes de celles numérotées respectivement 1 et 3) numérotées 2 et 8.

Comme on peut lire simultanément 3, 7, 2 et 6, D a son autre face (différente de celle numérotée 6) qui n'est pas numérotée 7, donc qui est numérotée 5.
Et C a son autre face (différente de celle numérotée 4) qui est numérotée 7.
De même, B a son autre face (différente de celle numérotée 3) qui n'est pas numérotée 2, donc qui est numérotée 8.
Et A a son autre face (différente de celle numérotée 1) qui est numérotée 2.

Le total du jet des pièces A, B, C et D peut être au maximum 2 + 8 + 7 + 6 = 23.

La réponse est 23.

6 Quatre opérations et neuf chiffres

Le produit 20 ne peut être obtenu qu'avec 5 x 4.

Selon l'énoncé, 1 est forcément le dernier chiffre à droite d'une ligne (hors tache).
Il ne peut pas faire partie de la somme, car il manquerait à sa gauche 10 pour arriver à 11.
Selon l'énoncé, il ne peut pas être le diviseur dans la division.
Donc c'est le résultat de la soustraction, et les 2 chiffres à sa gauche diffèrent de 1.

Si la somme 11 est obtenue avec 8 et 3, alors il reste 2, 6, 7 et 9.
Les chiffres qui diffèrent de 1 pour la soustraction sont forcément 7 et 6.
Il reste 9 et 2 pour la division, ce qui est impossible.

Donc la somme 11 est obtenue avec 9 et 2, car tout autre cas utiliserait 5 ou 4.
Il reste 3, 6, 7 et 8.

Si les chiffres qui diffèrent de 1 pour la soustraction sont 7 et 6, il reste 8 et 3 pour la division, ce qui est impossible.

Donc les chiffres qui diffèrent de 1 pour la soustraction sont 8 et 7, et la division de 6 par 3 est bien possible.

La réponse est :

$$\boxed{5} \times \boxed{4} = 20$$

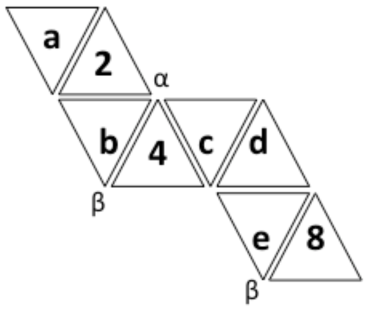
$$\boxed{9} + \boxed{2} = 11$$

$$\boxed{8} - \boxed{7} = \boxed{1}$$

$$\boxed{6} \div \boxed{3} =$$

7 Le solide d'Octa

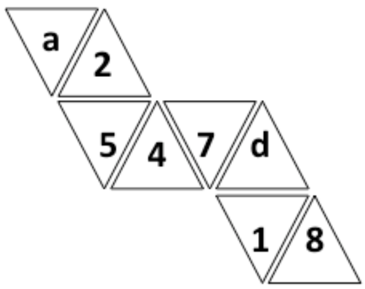
La somme des nombres de 1 à 8 est (1+8) + (2+7) + (3+6) + (4+5) = (4.9) = 36.
En considérant 2 sommets opposés entourés de 4 triangles, on déduit que la somme constante autour d'un sommet est la moitié de 36, soit 18.



Ensuite, le plus simple est de découper le patron pour se convaincre du raisonnement.
Autour du sommet α, il y a b et c dont la somme doit être 12 (18 – 2 – 4).
Alors b vaut 5 ou 7 (et c vaut 7 ou 5), seule façon de décomposer 12 sans utiliser 8 ni deux fois 6.

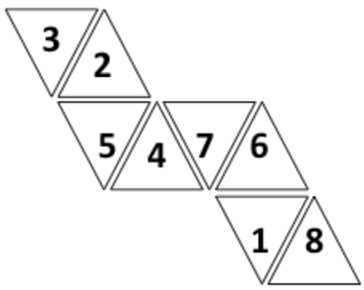
Autour du sommet β, il y a b et e dont la somme est doit être 6 (18 – 4 – 8).
Donc b est inférieur à 6 : b vaut 5, c vaut 7 et e vaut 1.

A ce stade, nous avons :



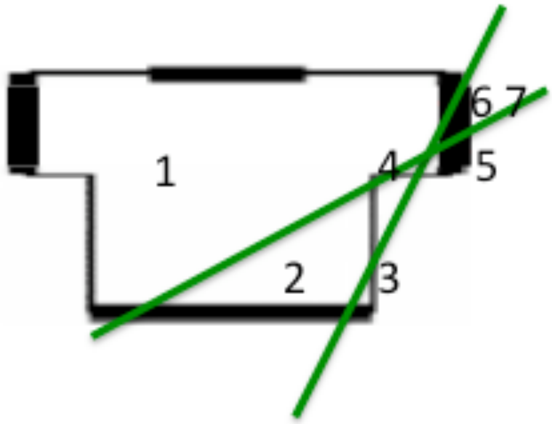
La conclusion est immédiate : d vaut 6 (18 – 4 – 7 – 1) et enfin a vaut 3.

D'où la **réponse** :



8 Le T-shirt

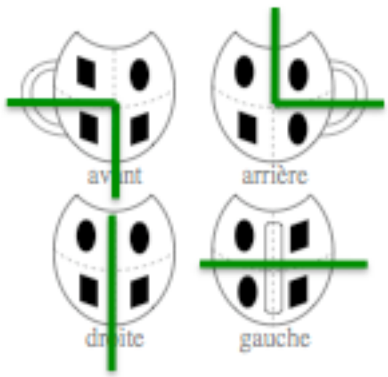
Pour utiliser au mieux les propriétés du T-shirt, chaque découpage passe simultanément par le bas du T-shirt et par une manche (on ne pas passer par au moins trois des quatre ouvertures) et les deux découpages se coupent d'un côté ou de l'autre.



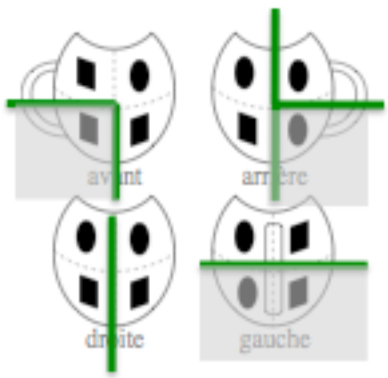
La réponse est 7.

9 Le vase de Clovis

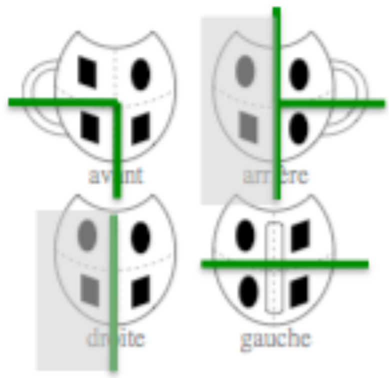
On doit d'abord, sur chaque vue, séparer deux symboles identiques par une brisure, puisque chaque morceau contient un rond et un carré.
Cela donne la figure suivante :



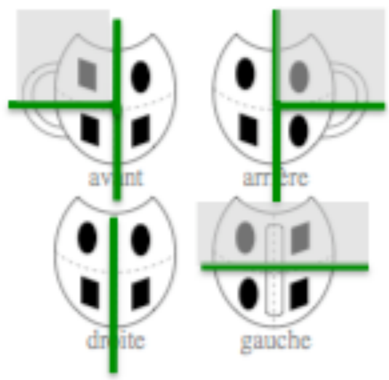
Le carré en bas et à gauche de la vue avant est connecté vers le bas de la vue gauche puis le rond en bas et à droite de la vue arrière.
Une fois ajoutée la brisure verticale en bas sur cette vue, cela donne le morceau gris :



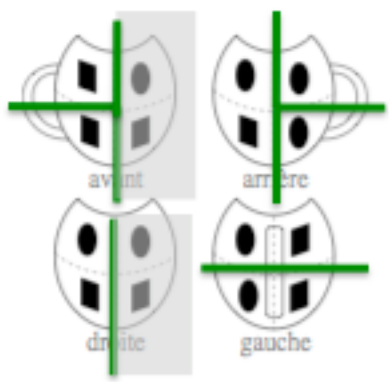
Cela donne également le morceau gris suivant :



Le rond en haut et à droite de la vue arrière est connecté vers le haut de la vue gauche puis le carré en haut et à gauche de la vue avant.
Une fois ajoutée la brisure verticale en haut sur cette vue, cela donne le morceau gris suivant :



Le dernier morceau ne nécessite pas de nouvelle brisure :



10 Nombre de nombres

En partant d'un nombre de trois chiffres, Appolonia obtiendra un nombre inférieur ou égal à 6, donc un seul chiffre puis 1. Au total, elle n'écrira pas plus de 3 nombres.

En partant d'un nombre de quatre chiffres ABCD, elle obtiendra au plus 10 nombres avec A, B, C, D, AB, BC, CD, ABC, BCD et ABCD. Si elle en obtient moins de 10, elle n'écrira pas plus de 3 nombres. Si elle en obtient 10, elle écrira les 4 nombres ABCD, 10, 3 (1, 0 et 10) et enfin 1. Pour les obtenir, il faut que A, B, C et D soient tous différents et que A, B et C soient non nuls.

La réponse est 1230.

11 Le poids des bagages

Appelons t le coût de la taxe, en euros par kilogramme supplémentaire.

Du côté de M et Mme LOURD, selon la répartition des 58 kilogrammes de bagages entre les deux personnes, on a : (58 – P) t ≥ 20 ≥ (58-2P) t.
De même, du côté de M et Mme LEGER, on a : (58 – P) t ≥ 11 ≥ (58-2P) t.

En ne retenant que les inégalités les plus contraignantes, on obtient :
(58 – P) t ≥ 20 et 11 ≥ (58-2P) t.
On déduit :
11 (58-P) ≥ (20.11) / t ≥ 20 (58-2P)
(40-11) P ≥ (20-11).58
29 P ≥ (9.58) soit P ≥ (9.2).

P = 18 convient avec t = 1/2 euros par kilogramme supplémentaire.
M ou Mme LOURD a des bagages de 58 kilogrammes (20 euros de taxe).
M et Mme LEGER ont chacun des bagages de 29 kilogrammes (deux fois 5,5 euros de taxe).

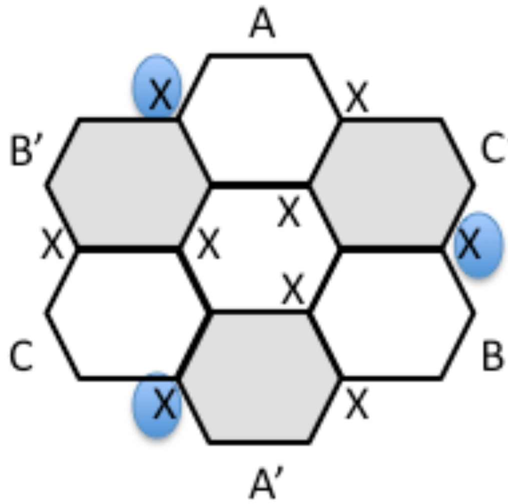
La réponse est 18 kilogrammes.

12 La ruche magique

Les trois hexagones en gris sur la première figure totalisent 3 x (1+...+6) = 3 x 21 = 63.

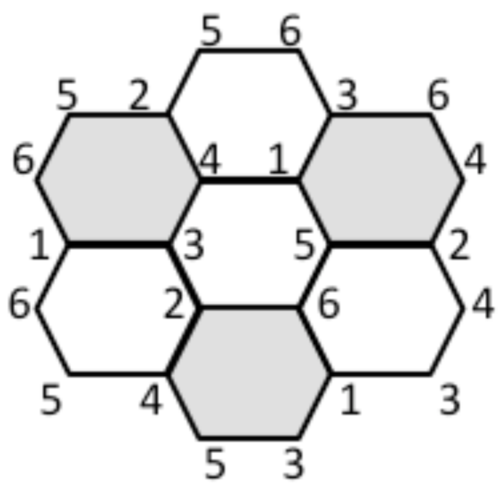
Restent 3 arêtes, A, B et C. On ne peut pas écrire 6 sur chacune de ces arêtes, car il serait impossible d'écrire 6 sur l'hexagone central. A, B et C contiennent donc au maximum deux 6. De même, A, B et C contiennent au maximum deux 5 et deux 4.
Donc le maximum ne peut pas dépasser 63 + (2 x (4+5+6)) = 63 + 30 = 93.

Si 93 est atteint, alors A, B et C contiennent deux 6, deux 5 et deux 4.
Par le même raisonnement, A', B' et C' contiennent deux 6, deux 5 et deux 4.
Chacun des hexagones extérieurs contient exactement une fois chacun des chiffres 1, 2 et 3, qui sont placés sur les X de la figure (ou bien celle obtenue par rotation de 60°).
Le même chiffre est alors écrit sur les X cerclés et il est impossible de l'écrire sur l'hexagone central.



Donc le maximum ne peut pas dépasser 92, qu'il est effectivement possible d'atteindre comme par exemple sur la deuxième figure.

6 et 5 sont écrits 5 fois, 4 et 3, 4 fois, 2 et 1, 3 fois.

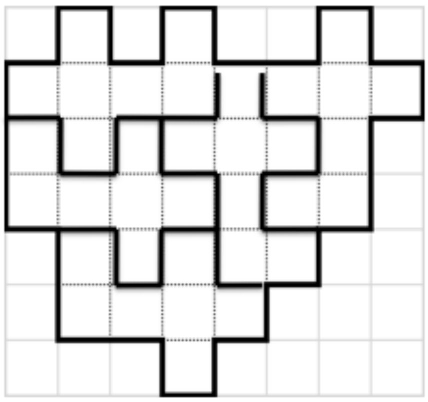


La réponse est 92.

13 Découpage en 5

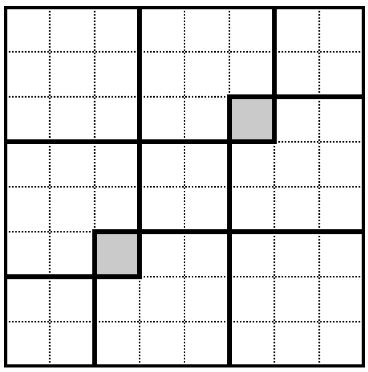
Chaque morceau comporte 7 carrés.

Si l’on considère les trois colonnes de droite du quadrillage, il y a 9 carrés, donc il en vient 2 de la gauche, ou bien il en vient 3 et il en part 1, etc.
En commençant par le premier cas, par tâtonnement, on trouve un découpage.



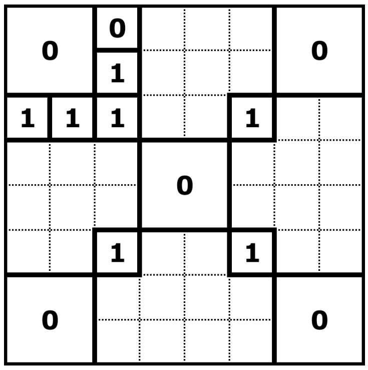
14 3x3 sur 8x8

Dans la première figure, chacun des six carrés 3x3 tracés contient 4 pièces, et il y a au maximum 2 pièces perdues (comptées deux fois) sur les deux cases grises.
Donc, au total, on a au moins (6.4) – 2 = 22 pièces.

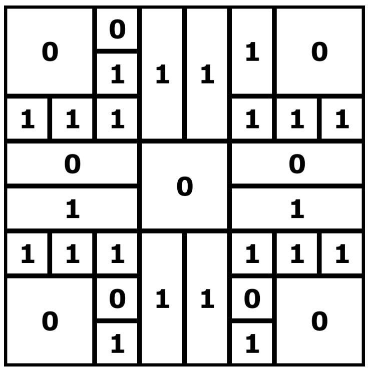


Cherchons à atteindre ce minimum.

En faisant tourner la première figure de 90° et en finalisant le carré 3x3 en haut et à gauche, on obtient cette deuxième figure :



De proche en proche, en considérant tous les carrés 3x3 des 3 premières et des 3 dernières lignes ou colonnes de cases, on obtient cette troisième figure :



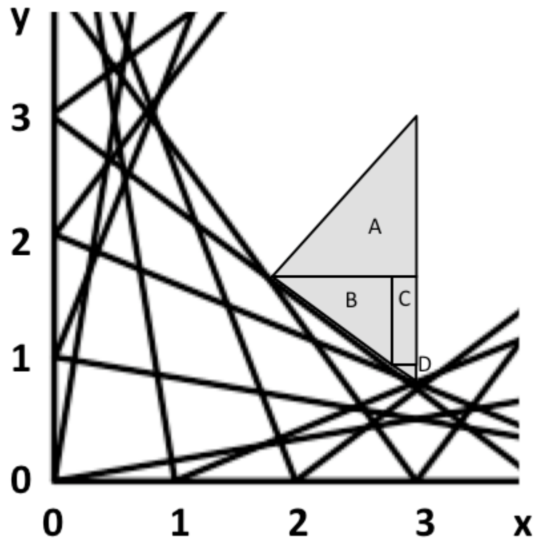
Enfin, en considérant les quatre carrés 3x3 qui contiennent le carré 2x2 central, on obtient cette quatrième figure (qui fonctionne effectivement sur les douze carrés 3x3 restant) :

		1			1		
1	1	1	1	1	1	1	1
		1			1		
1	1	1	1	1	1	1	1
		1			1		

La réponse est 22.

15 Autofocus

Raisonnons, pour des raisons de symétrie, sur la région $0 < y < x < 3$ du plan, de surface 9/2.



Nous avons, dans la partie centrale :
- le triangle A ($12/7 < y < x < 3$) de surface $81 / (2.7^2)$
- le triangle B (délimité par les droites « $x = 20/7$ » à droite, « $y = 12/7$ » en haut, et « $4y + 3x = 12$ ») de surface $24 / 7^2$
- le rectangle C ($20/7 < x < 3$ et $6/7 < y < 12/7$) de surface $6 / 7^2$
- le triangle D (délimité par les droites « $x = 3$ » à droite, « $y = 6/7$ » en haut, et « $5y + 2x = 10$ ») de surface $1 / (5.7^2)$.
-

Au total, nous avons une surface non traversée de :
$(5.81 + 10.24 + 10.6 + 2) / (2.5.7^2) = 101 / (2.5.7) = 101/70$.

Rapportée à 9/2, on obtient la **réponse 101/315.**

16 Les anti-segments

On trace d'abord N droites. Le nombre de régions du plan, que l'on peut retrouver par récurrence (la $N^{ème}$ droite coupe au maximum (N-1) droites, donc elle ajoute au maximum N régions), est : $(N^2 + N + 2) / 2$.

On doit percer un "trou" (segment de longueur non nulle) sur chaque droite, ce qui connecte chaque fois au minimum deux régions et en fait perdre une, donc N au total.

Les anti-segments partagent ainsi le plan au maximum en :
$(N^2 + N + 2) / 2 – N = (N^2 - N + 2) / 2$ régions.

Pour N = 2011, on trouve **la réponse 2 021 056**.

17 Le cube de l'année

On se familiarise avec les cubes 3x3x3 et 5x5x5, où l'on compte respectivement 19 et 55 petits cubes traversés par le plan.

Appelons T(N) le nombre triangulaire de rang N, c'est-à-dire la somme des entiers de 1 à N.

On se repère avec les coordonnées dans l'espace, à partir d'une origine située au coin à gauche, à l'avant et en bas du cube.
Le plan de coupe a pour équation x+y+z = 3016,5.

Pour les petits cubes de la couche inférieure, 0 < z < 1, seront traversés par le plan ceux tels que 3015,5 < x+y < 3016,5. Cela en fait T(1007)-T(1004).
On s'en convainc en remarquant que le petit cube vers l'origine permet à x+y+z de prendre les valeurs de 0 à 3, les deux petits cubes qui le touchent de 1 à 4, etc.

De même, pour les petits cubes de la couche suivante, 1 < z < 2, seront traversés par le plan ceux tels que 3014,5 < x+y < 3015,5. Cela en fait T(1008)-T(1005).
Couche après couche, on arrive à T(2011)-T(2008).

Ensuite, il faut faire attention au passage du coin (x=0, y=2011) qui donne T(2012)-T(2009)-2 (ces 2 sont en dehors du cube).

Couche après couche, on recommence avec T(2011)-T(2008) pour arriver enfin à T(1007)-T(1004).

Finalement, le plan coupe un nombre de petits cubes égal à la somme :
2 { (T(1007)-T(1004)) + (T(1008)-T(1005)) + … + (T(2011)-T(2008)) }
+ { T(2012)-T(2009)-2 } .

Soit, en éliminant tous les nombres triangulaires dont le rang est compris (au sens large) entre 1007 et 2008 :
T(2012) + 2T(2011) + 2T(2010) + T(2009) - 2T(1006) - 2T(1005) – 2T(1004) -2.

On ramène tous les « T » à T(2010) ou T(1005).

On utilise T(2010) = 4 T(1005) - 1005, et on obtient finalement 18 T(1005) + 1.

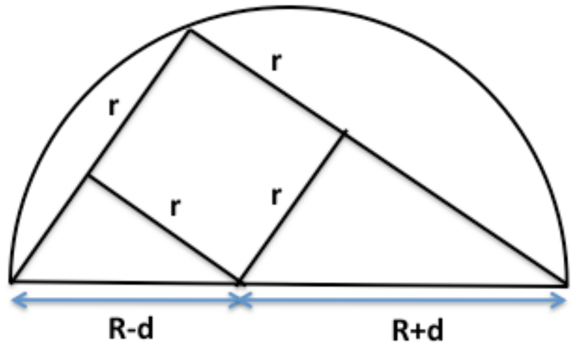
On vérifie que 18 T(1) + 1 = 19 (pour 3 = (2.1) + 1) et 18 T(2) + 1 = 55 (pour 5 = (2.2) + 1).

T(1005) = (1005.1006/2) = (1005.503) = 505 515.

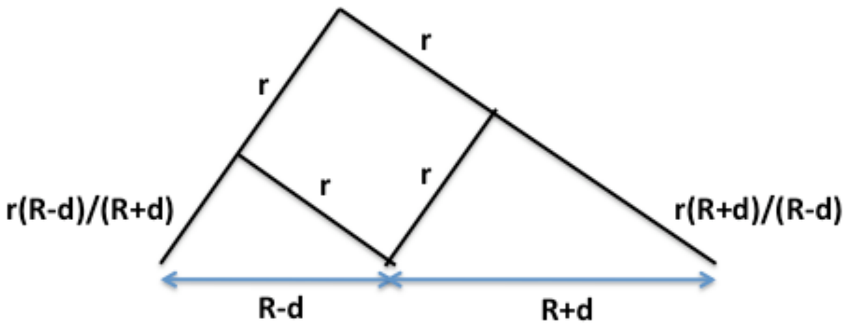
La réponse est 9 099 271 .

18 La tête de hibou

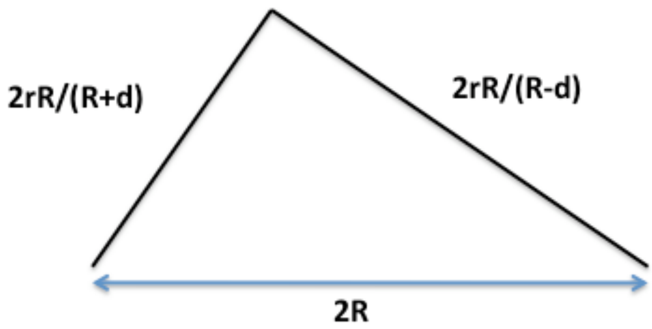
On applique le théorème dit de Poincaré, que l'on peut « intuiter » car l'énoncé ne précise pas la situation du quadrilatère.
D'où que l'on parte sur le grand cercle, le tracé successif des 4 tangentes au petit cercle nous ramènera au point de départ.
Donc on peut prendre un cas particulier, comme celui de la figure suivante (symétrie par rapport à l'horizontale) :



En appliquant les proportions dans les deux petits triangles rectangles semblables, on obtient :



Puis, en appliquant le théorème de Pythagore dans le grand triangle rectangle



et en divisant les dimensions par 2rR, on obtient : $1/(R-d)^2 + 1/(R+d)^2 = 1/r^2$
soit $1/((R/d)-1)^2 + 1/((R/d)+1)^2 = 1/(r/d)^2$

L'énoncé donne $R/d = 7$ et nous demande r/d.
$1/6^2 + 1/8^2 = 1/(r/d)^2$
$r/d = \sqrt{((36.64)/(36+64))} = (6.8)/10 = (6.4)/5$. **La réponse est 24/5.**

N.B. La figure est une combinaison de triangles rectangles « 3 4 5 ».