Une solution du problème n° 17 des demi-finales du 29ème championnat de la FFJM : "Le parallélipipède"

Désignons par a, b et c les 3 côtés du parallélipipède, avec $a \leq b \leq c$.

Le nombre de cubes non-peints est égal à $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$. De plus, comme le nombre de cubes peints est égal à $abc/2$, le nombre de cubes non-peints est aussi égal à $abc/2$. On a donc $2(a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc$.

Examinons les valeurs successives de a.

Si $a = 1$, on a $0 = bc$, impossible.

Si $a = 2$, on a $(b - 1)(c - 1) = bc$, impossible.

Si $a = 3$, on a $4(b - 1)(c -1) = 3bc$

si $b = 3$,	on a $c = - 8$,	à rejeter
si $b = 4$,	on a $c = 0{,}5$	à rejeter
si $b = 5$,	on a $c = 16$	solution n° 1 avec **abc = 240**
si $b = 6$,	on a $c = 10$	solution n° 2 avec **abc = 180**
si $b = 7$,	on a $c = 8$	solution n° 3 avec **abc = 168**
si $b > 7$,	on a $c < 8$	à rejeter vu que $b \leq c$

Si $a = 4$, on a $3(b - 1)(c - 1) = 2bc$

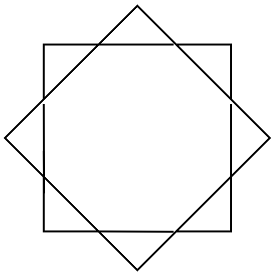
si $b = 4$,	on a $c = 9$	solution n° 4 avec **abc = 144**
si $b = 5$,	on a $c = 6$	solution n° 5 avec **abc = 120**
si $b > 5$,	on a $c < 6$	à rejeter vu que $b \leq c$

Si $a = 5$, on a $8(b - 1)(c - 1) = 5bc$

si $b > 4$,	on a $c < 6$	à rejeter car $a = b = c = 5$ ne convient pas

Si $a > 5$, $b > 5$ et $c > 5$, alors on a $32/25 < 2(a -1)(b -1)/ab < 2$ et $1 < c/(c - 1) < 5/4$ et, comme $5/4 < 32/25$, on ne peut avoir $2(a-1)(b - 1)(c - 1) = abc$.

Une solution du problème n° 18 des demi-finales du 29ème championnat de la FFJM : "Les deux échiquiers"



Voici les deux échiquiers après rotation.

Distinguons l'octogone intérieur et les 8 triangles extérieurs.

Vu que les diagonales des échiquiers sont des axes de symétrie, les 3/4 de la surface de l'octogone apparaissent en noir : la moitié provenant de l'échiquier supérieur et un quart (la "moitié de la moitié") provenant de l'échiquier inférieur.

Vu les axes de symétrie et la non-superposition, la moitié de la surface des 8 triangles extérieurs est noire.

L'aire totale noire apparente représente donc :
3/4 de l'octogone + 4 triangles = 3/4 d'un échiquier + 1 triangle.

L'échiquier a une surface totale de 64 cases x 25 cm² = 1.600 cm².

Un triangle extérieur est un triangle rectangle isocèle. Sa hauteur est égale à 4 x 5 x (1,414 - 1) et sa surface est égale à $[4 \times 5 \times (1{,}414 - 1)]^2 \approx 69$ cm².

L'aire totale noire apparente est donc de (3/4 x 1.600) + 69 ≈ **1.269 cm²**.