

29^e Championnat International
des Jeux Mathématiques et Logiques

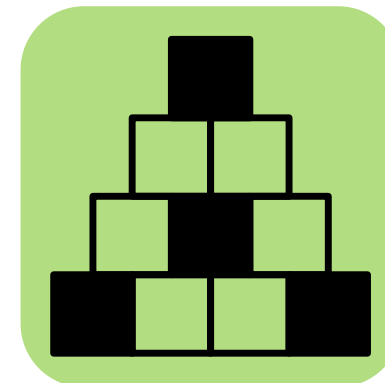
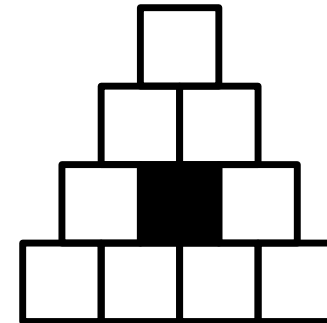
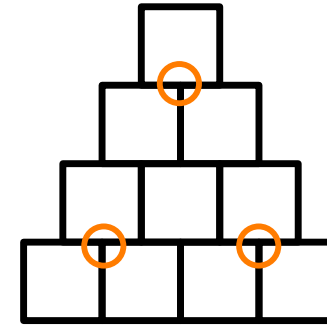


Finale Internationale des 27 et 28 août 2015

Solutions détaillées

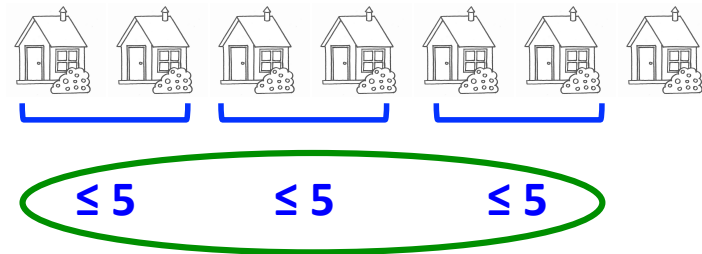
Jour 1 – Problème 1 – La pyramide

- Autour de chacun des trois points de contact cerclés, les trois cubes sont de couleurs différentes, il y a un cube noir
- Le quatrième cube noir est forcément au centre
- Les trois autres cubes noirs ne le touchent pas



Jour 1 – Problème 2 – Le bord du lac

- Le nombre total de personnes habitant deux maisons voisines est au plus 5



- Chaque maison est habitée par au moins 1 personne



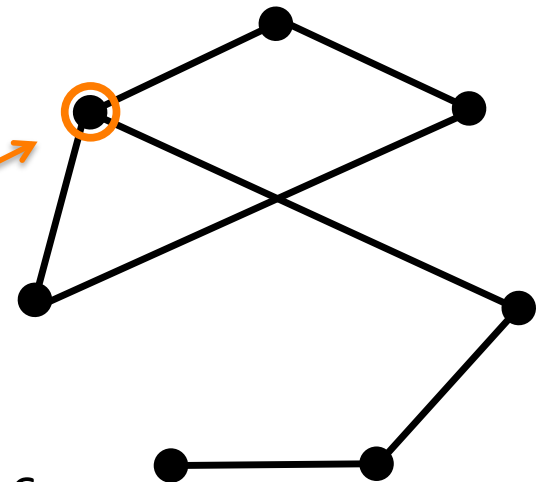
- Le nombre total de personnes habitant les sept maisons est au plus $(3 \times 5) + 4 = \mathbf{19}$
- La configuration est unique*



- Note: si l'on considère que le bord du lac est circulaire, alors la réponse est 17 et plusieurs configurations sont possibles*

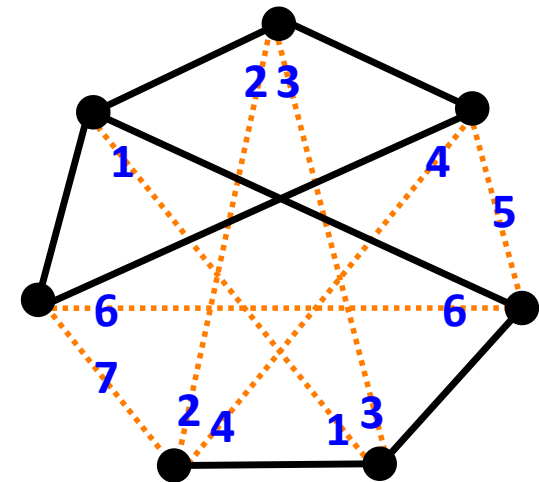
Jour 1 – Problème 3 – La constellation

- Chaque étoile est reliée à N autres étoiles
- En faisant le tour de toutes les étoiles, nous comptons deux fois le même segment
- $7 \times N$ est le double du nombre de segments
- N est divisible par 2
- Une étoile est déjà reliée à **3** autres, $N \geq 4$
- Aucune étoile n'est reliée à toutes les autres, $N < 6$
- $N = 4$

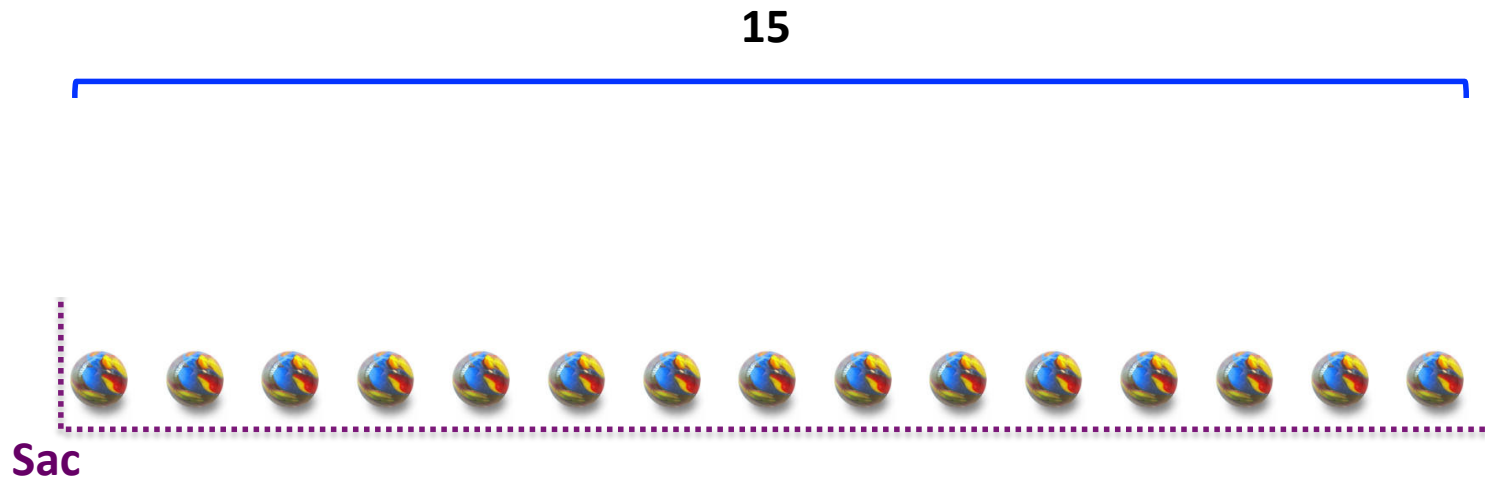


Jour 1 – Problème 3 – La constellation

- Le nombre total de segments est la moitié de $7 \times 4 = 28$, soit 14
- Il faut rajouter $14 - 7 = 7$ segments aux 7 déjà tracés
- *La figure fournit un exemple, invariant par rotation ou symétrie*

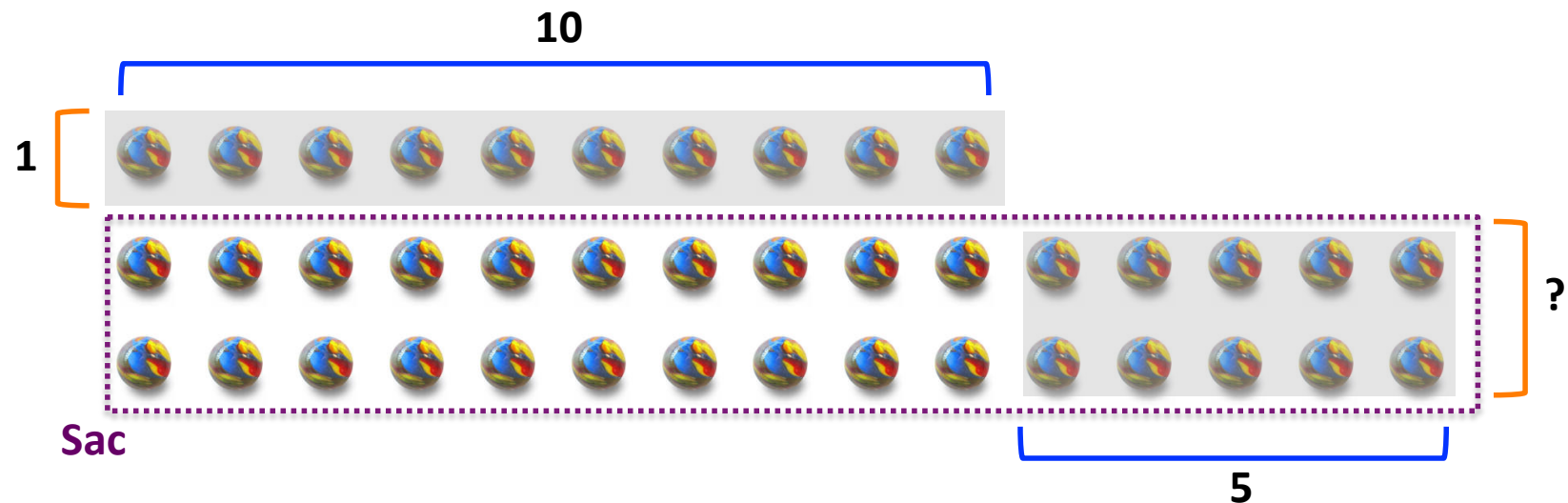


Jour 1 – Problème 4 – Le sac de billes



- Si le sac avait contenu 15 billes de moins, alors chacun d’eux aurait reçu 1 bille de moins
- Marble et ses amis sont au nombre de 15
(à l’horizontale sur le dessin)

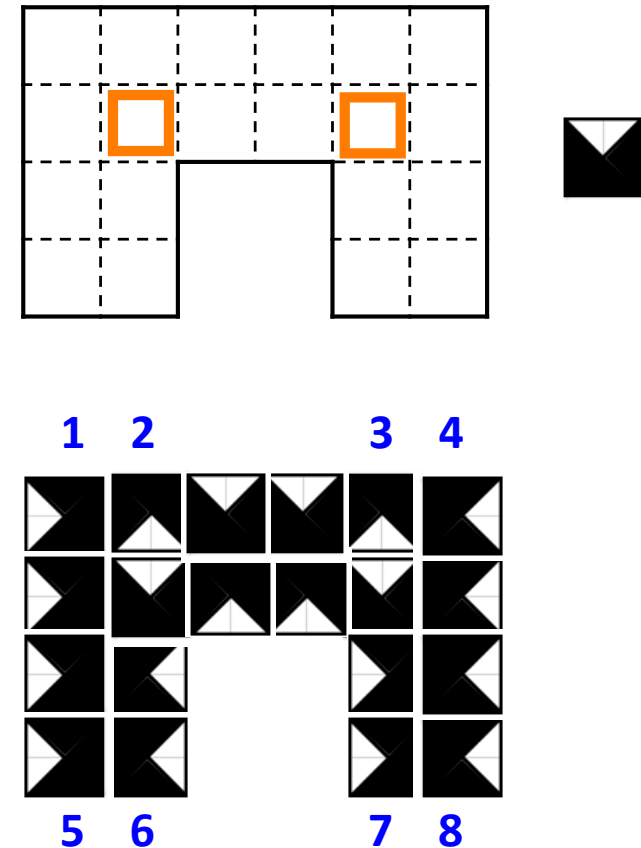
Jour 1 – Problème 4 – Le sac de billes



- S'ils avaient été 5 de moins, soit 10, alors chacun d'eux aurait reçu 1 bille de plus
- Le nombre de billes est le même dans les 2 rectangles gris sur le dessin
- $? = 2$, le sac contenait $15 \times 2 = \mathbf{30}$ billes

Jour 1 – Problème 5 – L'arc de triomphe

- Pour chacun des deux carrés oranges, il y a 1 triangle blanc lui appartenant et 1 autre appartenant à un carré voisin
- Ces 4 triangles blancs ne sont pas sur le bord
- Il reste $20 - 4 = 16$ triangles blancs
- Il y a au moins $24 - 16 = 8$ triangles noirs sur le bord
- *La figure fournit un exemple*



Jour 1 – Problème 6 – Les colocataires

- L'utilisation des deux salles de bain totalise
 $21 + 20 + 15 + 14 + 13 + 7 = 90$ minutes
- $90 / 2 = 45$
- $45 - 21 = 24$ ne peut pas être obtenu avec 20, 15 ou 14
(il manque 4, 9 ou 10), ni $13 + 7 = 20$
- L'utilisation d'une salle de bain dépasse **45** minutes
- $46 - 21 = 25$ ne peut pas être obtenu avec 20, 15 ou 14
(il manque 5, 10 ou 11), ni $13 + 7 = 20$
- $44 - 21 = 23$ ne peut pas être obtenu avec 20, 15 ou 14
(il manque 3, 8 ou 9), ni $13 + 7 = 20$
- L'utilisation d'une salle de bain dépasse **46** minutes

Jour 1 – Problème 6 – Les colocataires

- L'utilisation d'une salle de bains peut être $20 + 14 + 13 = 47$ minutes et celle de l'autre $21 + 15 + 7 = 43$ minutes
- La première utilisation d'une salle de bain débute au plus tard 47 minutes avant 8 heures, soit **13 minutes** après 7 heures (elle finit alors à 8 heures pile)

Jour 1 – Problème 7 – Des 3 en plus

- Sur la ligne du milieu, la somme est au plus $31 + 73 + 73 = 177$
- Nous n'ajoutons pas un 3 au 67 en bas à gauche car 177 est strictement inférieur à 367 et à 673
- Nous n'ajoutons pas un 3 au 61 en haut au milieu car 177 est strictement inférieur à 361 et à 613

4	61	7
31	73	73
67	1	1

4	61	7
1	7	7
67	1	1

4	61	7
1	7	7
67	1	1

Jour 1 – Problème 7 – Des 3 en plus

- Pour que la ligne du bas et la colonne du milieu aient la même somme, comme $67 + 1 = 61 + 7$, soit les 7 et 1 sont inchangés, soit ils sont changés en 37 et 31

4	61	7
1	7	7
67	1	1

- Si les 7 et 1 sont inchangés, la somme sur la ligne du bas est 69, 81 ou 99

4	61	7
1	7	7
67	1	1

4	61	7
1	7	7
67	13	1

4	61	7
1	7	7
67	31	1

- Mais, sur la ligne du haut, cette somme est impossible à obtenir (il manque 8, 20 ou 38 en partant des 4 et 7)

Jour 1 – Problème 7 – Des 3 en plus

- Pour que la ligne du milieu et la colonne à gauche aient la même somme, comme $67 - 37 = 30$, les 7 et 4 sont changés en 73 et 43
- Toutes les lignes et colonnes totalisent 111 sauf la ligne du bas et la colonne du milieu
- Le cinquième 3 doit être ajouté à leur intersection
- La somme constante est **111**
(il n'y a qu'une seule façon de l'obtenir)
- *Note: les deux diagonales ont aussi pour somme 111, le carré est magique et composé exclusivement de nombres premiers*

4	61	7
1	37	7
67	1	31

43	61	7
1	37	73
67	1	31

43	61	7
1	37	73
67	13	31

Jour 1 – Problème 8 – La savane

- Après chaque opération, le nombre de zèbres et le nombre de hyènes restent de même parité
- En fonction de la situation de départ, l'équilibre est atteint lorsque chacun de ces deux nombres est 0
- En les additionnant à la fin, $20 - 2a = 0$ donne $a = 10$, puis $(b - c) = 3$
- Le nombre de lions à la fin, $2 + a - b - c = 2 + a - (b - c) - 2c = 9 - 2c$, est le plus grand possible pour $c = 0$
- La réponse est **9** animaux restants

	Zèbres	Hyènes	Lions
	7	13	2
<i>a fois</i>	-1	-1	+1
<i>b fois</i>	+1	-1	-1
<i>c fois</i>	-1	+1	-1
Résultat final	$7-a+(b-c)$	$13-a-(b-c)$	

Jour 1 – Problème 8 – La savane

- *Nous vérifions l'existence d'un processus sur un exemple*

	Zèbres	Hyènes	Lions
	7	13	2
7 fois	-1	-1	+1
Résultat	0	6	9
3 fois	+1	-1	-1
Résultat	3	3	6
3 fois	-1	-1	+1
Résultat final	0	0	9

Jour 1 – Problème 9 – Le fromage

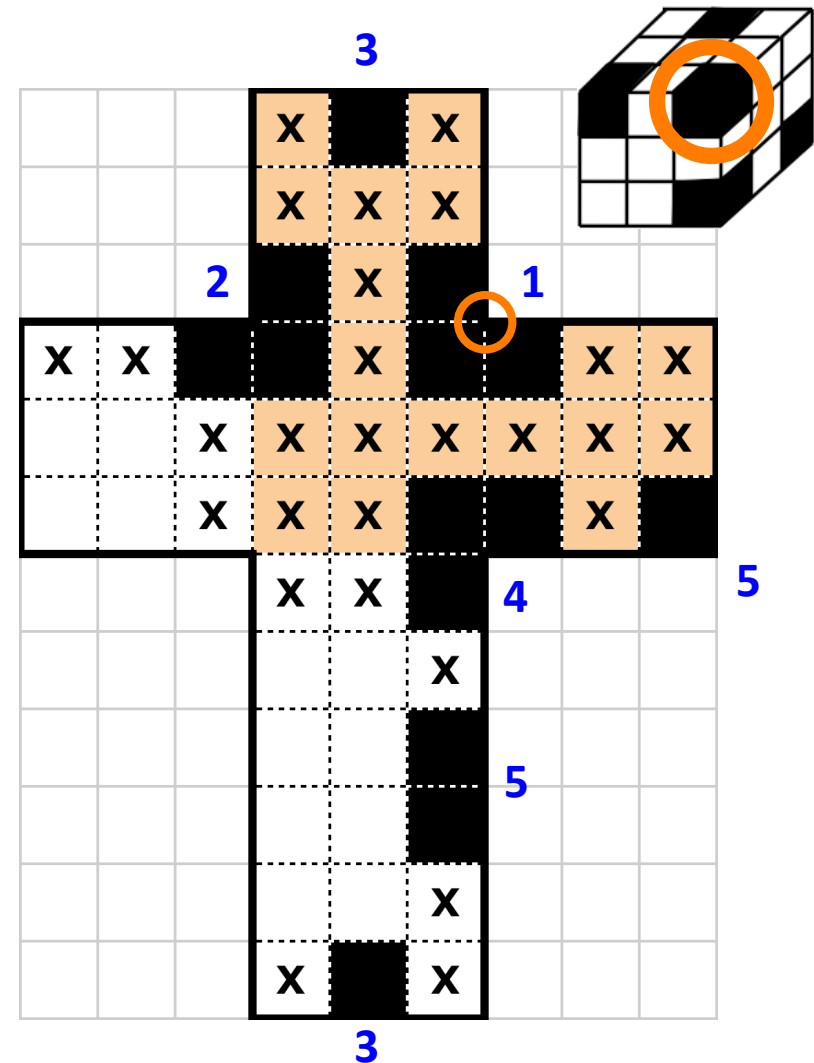
- Soient E le poids de l'eau demandé et S le poids de l'extrait sec
- Le fromage titrait 45% de matière grasse par rapport à l'extrait sec

Extrait sec		Eau
Matière grasse		
$(45/100)S$	$(55/100)S$	E

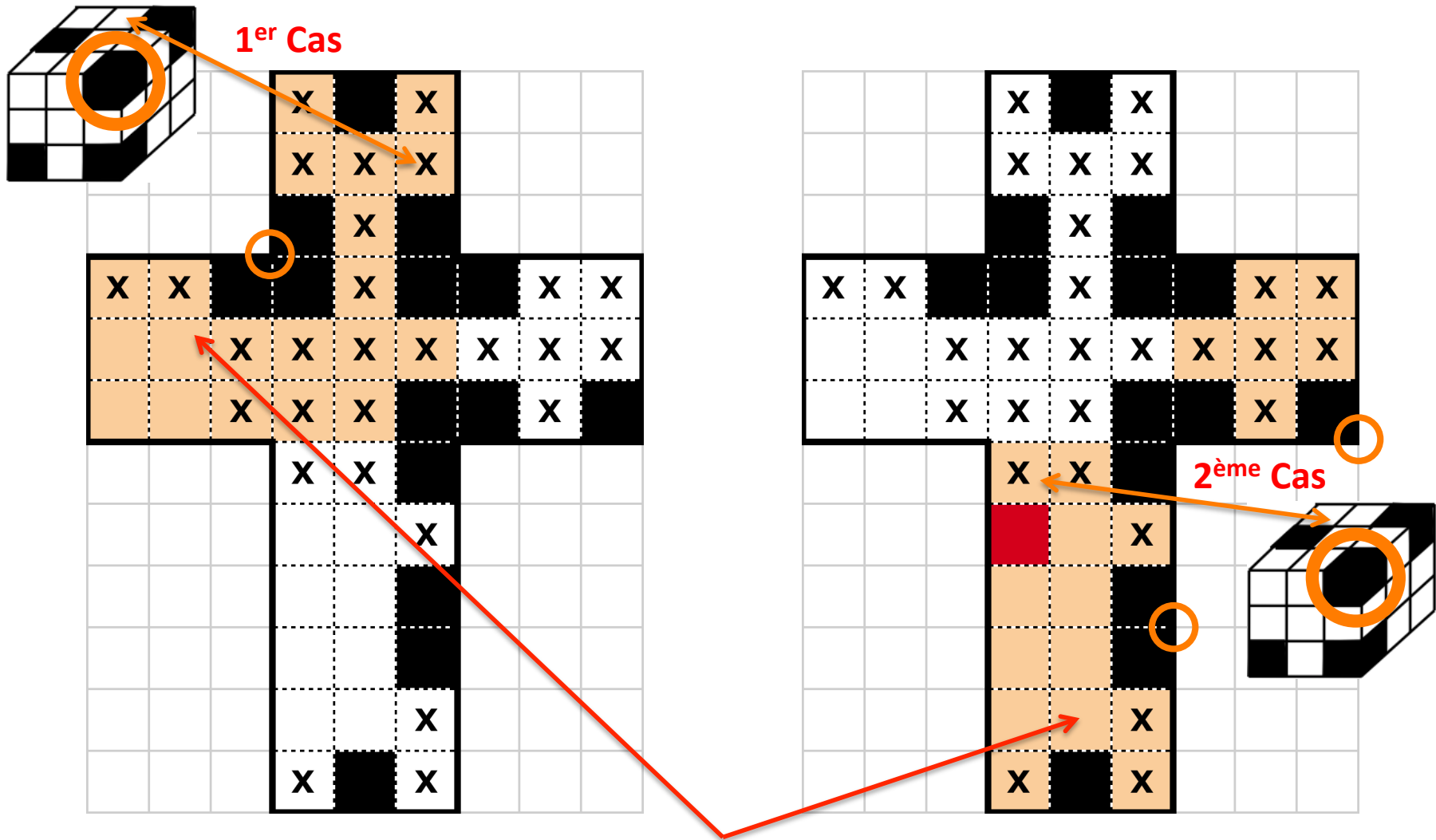
- Le fromage titre 22% de matière grasse sur produit fini
- $(45/100)S = (22/100)(E + S)$, soit $E = ((45 - 22)/45)(E+S)$
- Le fromage pèse 270 grammes, $E + S = 270$
- La réponse, unique, est $E = ((45 - 22)/45) \times 270 = 23 \times 6 = \mathbf{138}$ grammes

Jour 1 – Problème 10 – Les deux vues

- Nous commençons par la vue à gauche de l'énoncé
- Les 3 faces visibles sont colorées sur le patron
- Nous renseignons également les faces non visibles
- Nous continuerons par la vue à droite de l'énoncé
- Nous chercherons sur le patron la face visible au dessus (**3 Cas**)



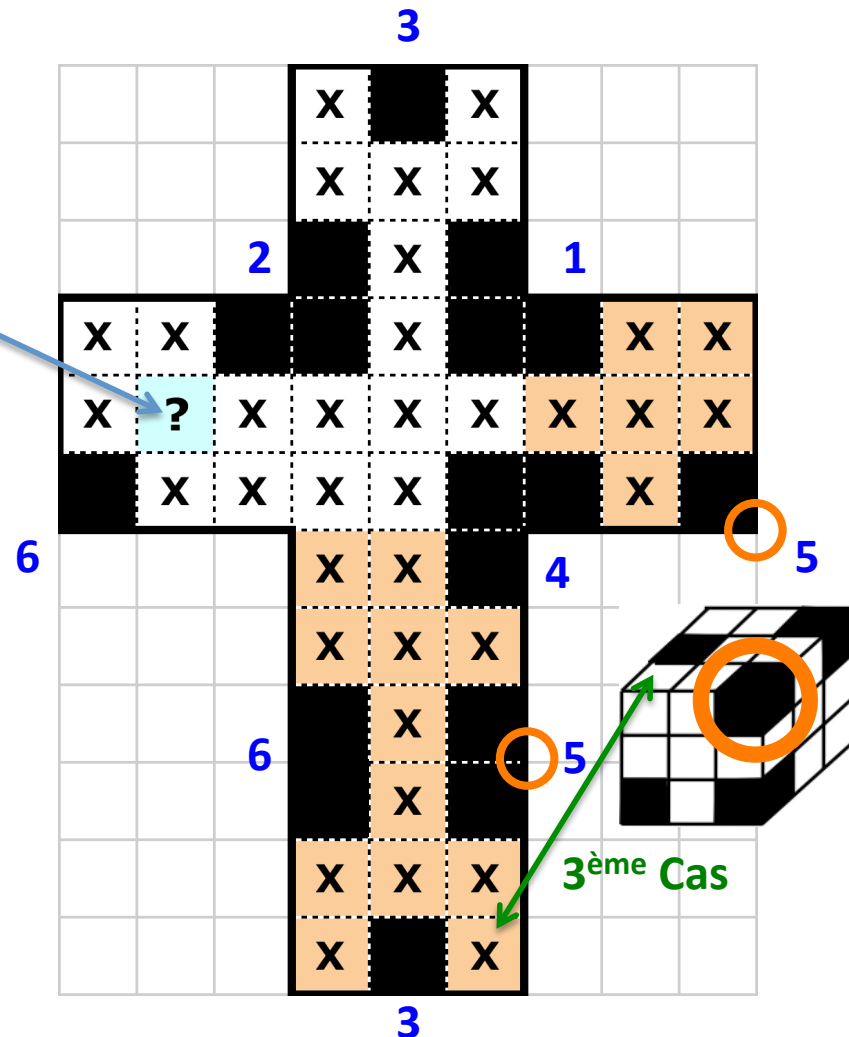
Jour 1 – Problème 10 – Les deux vues



- La face visible de face ne peut pas correspondre

Jour 1 – Problème 10 – Les deux vues

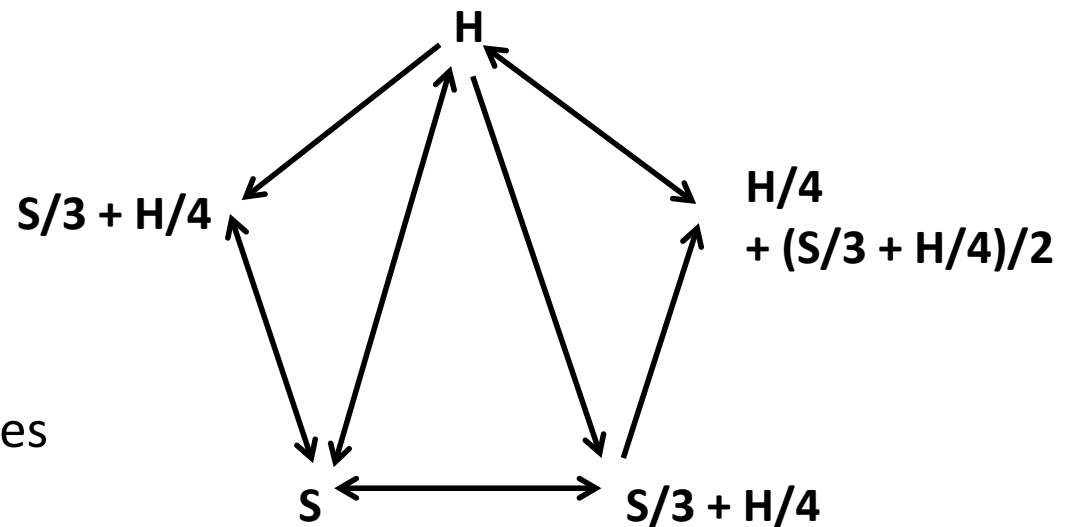
- (3^{ème} Cas) Nous ne pouvons rien dire pour ce petit cube ni pour **celui au centre du grand cube** (absent du patron)
- Le nombre de petits cubes noirs est pair
- Il y a **2 réponses**, **6** ou **8** petits cubes noirs



FFJM - 29^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 11 – Les pages internet (les noisettes dans la version étrangère)

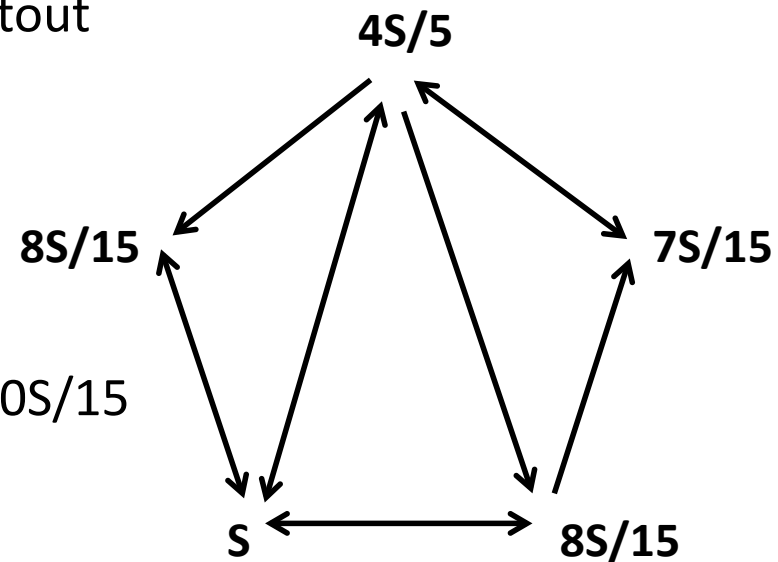
- Soit S le nombre demandé
- Soit H celui de la page (cachette) en haut
- Les 3 autres sont calculés en fonction de ce que les pages (cachettes) reçoivent



FFJM - 29^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 11 – Les pages internet (les noisettes dans la version étrangère)

- La page (cachette) à droite donne tout à la page (cachette) en haut
- $H/4 + (S/3 + H/4)/2 = H - S/3$
- $H = 4S/5$
- Le total des 5 nombres est $100 = 50S/15$
- La réponse, unique, est $S = \mathbf{30}$



FFJM - 29^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale
Jour 1 – Problème 11 – Les pages internet
(les noisettes dans la version étrangère)

donne = reçoit

$$6 + 6 + 6 + 6 = 10 + 14$$

- *Nous vérifions*

$$16 = 6 + 10$$

$$14 = 6 + 8$$

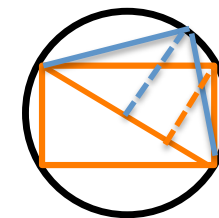
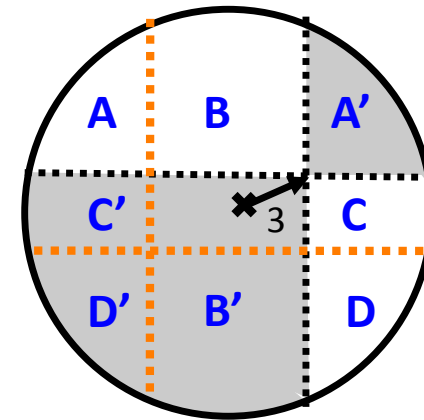
$$10 + 10 + 10 = 6 + 8 + 16$$

$$8 + 8 = 6 + 10$$

$$24 + 16 + 14 + 30 + 16 = 100$$

Jour 1 – Problème 12 – La tarte

- Par symétries, les aires grises A' , B' , C' et D' sont respectivement égales aux aires blanches A , B , C et D
- La différence des 2 parts est l'aire du rectangle
- L'aire d'un rectangle inscrit dans un cercle (ici, de rayon 3), produit du diamètre par la hauteur d'un triangle rectangle « moitié », est maximale lorsque cette hauteur est maximale, c'est-à-dire lorsque le rectangle est carré
- La réponse est $(3\sqrt{2})^2 = \mathbf{18} \text{ cm}^2$



FFJM - 29^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre (version étrangère)

- **3 Cas** sont possibles
 - Lorsque la somme des deux derniers chiffres est $(10 + N)$ avec $0 \leq N \leq 8$, l'opération donne **10..0**, **11..1**, ... , **18..8** ou **11..0**, **12..1**, ... , **19..8**
 - Lorsqu'elle est 9, l'opération donne **9...9** ou **10..9**
 - Lorsqu'elle est N avec $2 \leq N \leq 8$ (pas de 0 aux extrémités), l'opération donne **2...2**, **3...3**, ... , **8...8** ou **3...2**, **4...3**, ... , **9...8**

- Le 6^{ème} nombre est 17347 (**1^{er} Cas**)

- $X = 9$ (**3^{ème} Cas** pour le 5^{ème} nombre)

	0	0	1	
	X	Y	3-Y	17-X
	17-X	3-Y	Y	X
1	7	3	4	7

FFJM - 29^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre

(version étrangère)

- $4 - Y = Y, Y = 2$
- Le 5^{ème} nombre est 9218
- **Si** nous sommes dans le 3^{ème} Cas pour le 4^{ème} nombre, alors
 $Z = 4, 1 + (21 - T) = T, T = 11 > 9$
- Nous sommes dans le 1^{er} Cas, $Z = 1$
- $1 + 2U = (21 - T), T = 8, U = 6$
- Le 4^{ème} nombre est 1837
- Le 3^{ème} nombre est 968 (3^{ème} Cas)

1	1	0	
Z	T	13-Y-T	8-Z
8-Z	13-Y-T	T	Z
9	Y	3-Y	8

0	1	0	
4	T	11-T	4

1	1	1	
	9	U	8
	8	U	9
1	T	11-T	7

FFJM - 29^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre

(version étrangère)

- $W = 8$
- Si nous sommes dans le **1^{er} Cas** pour le 2^{ème} nombre, alors $V = 1$ et le 1^{er} nombre est **89** ou **98**
- Si nous sommes dans le **3^{ème} Cas**, alors $V = 4$ et le 1^{er} nombre est **143**, **242** ou **341**
- Il y a **5 réponses**

1	0	
V	W	8-V
8-V	W	V
9	6	8

1	1	
V	8	8-V

FFJM - 29^e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre (version étrangère)

- Nous vérifions dans le sens inverse*

1	+	2	+	3	+	4	+	5	+	6
89 ou 98	98 ou 89	187	781	968	869	1837	7381	9218	8129	17347
143 ou 341 ou 242	341 ou 143 ou 242	484	484							

- Note: dans la version en français,
le dernier chiffre à gauche est strictement inférieur au dernier chiffre à droite,
ce qui limite le nombre de solutions à deux, 89 et 143*

Jour 1 – Problème 14 – Le cryptarithme

- $I \neq 1$ et $N \neq 1$,
sinon $IAL \times NFE < 200 \times 700 = 140000$
et $F = 1$ (doublon)
- $L \neq 1$, sinon $IEA \times LFN < 200 \times 700 = 140000$
et $F = 1$ (doublon)

$$IAL \times NFE = FINALE \quad (1)$$

$$IEA \times LFN = FINALE \quad (2)$$

- $E \neq 1$, sinon à droite $L = 1$ (doublon)
- $A \neq 1$, sinon à droite $N = E$ (doublon)

$$IAL \times NF1 = FINAL1 \quad (1)$$

$$IE1 \times LFN = FIN1LE \quad (2)$$

- $F = 1$

Jour 1 – Problème 14 – Le cryptarithme

- A droite, LE est congru à E modulo 10 ($L \neq 1$) $IAL \times N1E = 1INALE$ (1)
- $E = 5$ (L impair) ou $L = 6$ (E pair), sinon $E = 0$
- $E \neq 5$, sinon à droite A ou N serait 5 (doublon) $I5A \times L1N = 1INAL5$ (2)
- Si $E \neq 0$, alors $L = 6$ et E est 2 ou 4 $IEA \times 61N = 1INA6E$ (2)
- Mais à droite AN n'est pas congru à E modulo 10 (restent 4 ou 2, 0 et 5)
- Si $E = 0$ et $A = 5$ (N pair), alors à droite $I05 \times L1N = 1IN5L0$ (2)
(modulo 100) $10 + N = 2L$, $N = 2$ et $L = 6$, $I = 4$
- Mais $405 \times 612 > 400 \times 600 = 240000 > 142560$

Jour 1 – Problème 14 – Le cryptarithme

- $E = 0$ et $N = 5$ (A pair)
- Restent 2, 4 et 6

- $5I < 10 + I + 1$, $I = 2$

$$IAL \times 510 = 1I5AL0 \text{ (1)}$$

- $264 \times 510 = 134640 > 125640$
- $A = 4$ et $L = 6$, $246 \times 510 = 125460$
- Nous vérifions que $204 \times 615 = 125460$ (2)
- La réponse, unique, est **125460**

Jour 1 – Problème 15 – Les suites de l'année

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	1	2	0	1	2	5	...

- Les termes $N^{\circ} 5Q$ et $N^{\circ} Q$ sont les mêmes

N°	1	2	3	4		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	1	2	0	1	2	5	...

$Q = 1$

N°	1	2	3	4		6	7	8	9		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	1	2	0	1	2	5	...

$Q = 2$

N°	1	2	3	4		6	7	8	9		11	12	13	14		16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	1	2	0	1	2	5	...

$Q = 3 \dots$

- Les termes $N^{\circ} (5Q + R)$, avec $0 < R < 5$, et $N^{\circ} (4Q + R)$ sont les mêmes

Jour 1 – Problème 15 – Les suites de l'année

- La réponse est
le N° **2019**

	2015	2016	2017	2018	2019
	403	1613	1614	1615	1616
	323	←.....1291.....1292.....	323		1293
	259	1033	1034		1035
	208	827	828		207
	167	662	663		166
	134	530	531		133
	108	106	425		107
	87	85	←.....	85	86
	70	17			69
	14	←.....	14		56
	12				45
	10				9 8 7 6 5
	2				1
Terme	0	0	0	0	2

Jour 1 – Problème 16 – Le partage

- La **somme des nombres dans les 2 colonnes sans indice** est $1^2 + 2^2 + \dots + 8^2 - (4 \times 29) = 88$
- Elle n'est **pas** obtenue avec **7 ni 8 huit** car il en faudrait 3 de plus pour connecter les 2 colonnes
- Si** elle est obtenue avec **6 huit**, alors ils sont tous dans une seule colonne, la 1^{ère} colonne est impossible car on y trouve 3 trois et 3 nombres de somme 20 sans six ni sept
- Elle n'est **pas** obtenue avec **moins de 5 huit** car $(4 \times 8) + (6 \times 7) + (2 \times 6) = 86 < 88$
- Elle est obtenue avec **5 huit, 6 sept et 1 six**

29	!	8				
	!	8			7	
	!	8				
	3	8				
29	3	8				
	3	8				
29			29	29	29	

29	!	7				8
	!	7	7	7	7	8
	!	7				8
	3	7				8
29	3	6				8
	3	6				8
29			29	29	29	

Jour 1 – Problème 16 – Le partage

- Les 6 **sept** sont dans une seule colonne, forcément la 6^{ème} (connexion au 7 déjà écrit)
- Il y a 1 **huit** et 2 **six** dans la 1^{ère} colonne
- Le **huit** ne peut pas être en haut car la 1^{ère} ligne serait impossible (3 nombres de somme 6)
- Il ne peut pas être inséré entre les 2 **six** (connexion des **six**)
- Le huit est en bas

29	8	8	!	!	!	7
	6				7	7
	6					7
	3					7
29	3					7
	3					7
29						

29	6	6	6	6		7
	8	8	8		7	7
	6	6				7
	3					7
29	3					7
	3					7
29						

Jour 1 – Problème 16 – Le partage

- Dans la 2^{ème} colonne, le **six** est en haut (connexion)
- Nous terminons la 1^{ère} ligne avec 1 **six** (connexion) et 2 **deux** (29)
- Nous terminons la 5^{ème} colonne avec 4 **cinq** (29 sans le dernier six)

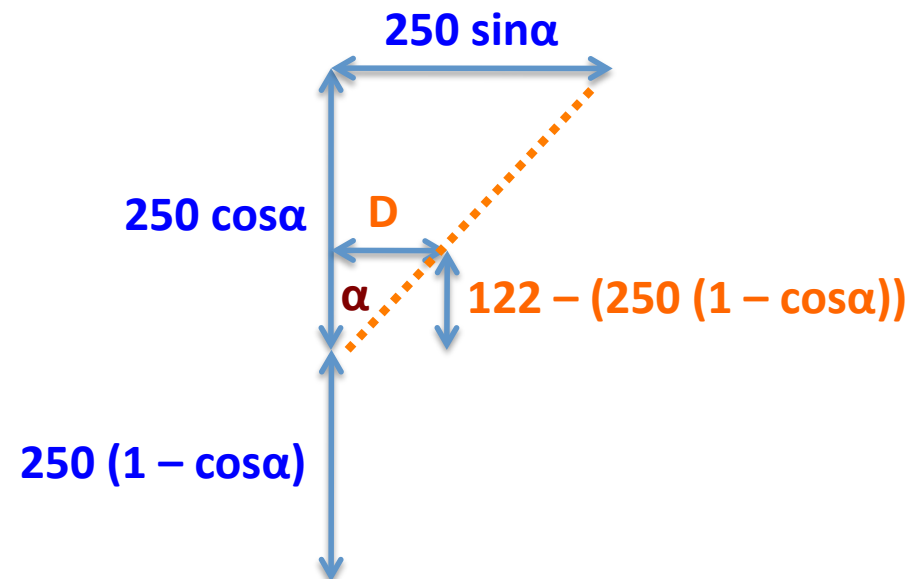
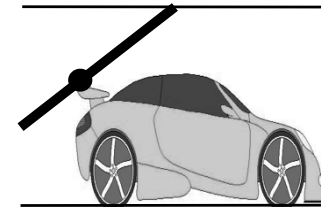
29	6	6	6	2	2	7
	6	8	6		7	7
	8	8			5	7
	3	8			5	7
29	3	8			5	7
	3	8			5	7
	29	29	29	29		

- Nous terminons la 5^{ème} ligne avec **un** et 1 **cinq** (29)
- La réponse est unique
- *Nous terminons la 6^{ème} ligne avec 2 **huit**, la 3^{ème} colonne avec 2 **quatre** (29), etc.*

29	6	6	6	2	2	7
	6	8	6	6	7	7
	8	8	4	4	5	7
	3	8	4	4	5	7
29	3	8	1	5	5	7
	3	8	8	8	5	7
	29		29	29	29	

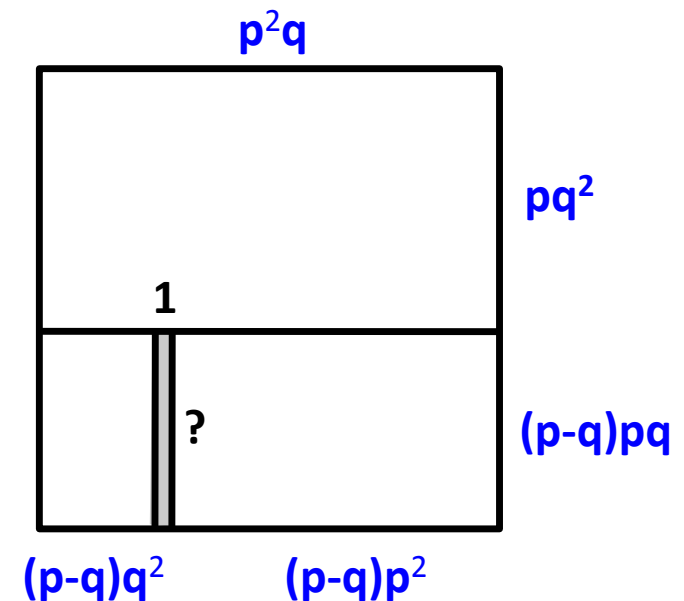
Jour 1 – Problème 17 – La porte de garage

- $D \cot \alpha = 122 - (250 (1 - \cos \alpha))$
- $D = 250 \sin \alpha - 128 \tan \alpha$
- $dD/d\alpha = 250(\cos^3 \alpha - (4/5)^3)/\cos^2 \alpha$
- Lorsque la porte s'ouvre,
D croît de 0 à un maximum pour
un angle dont le cosinus est 4/5
(et le sinus 3/5)
- La réponse est
 $(250 \times 3/5) - (128 \times 3/4) = \mathbf{54}$ cm



Jour 1 – Problème 18 – Le lotissement

- Soit p/q le rapport de la longueur à la largeur d'un rectangle (p et q premiers entre eux)
- En raisonnant sur les divisibilités, nous trouvons les expressions ci-contre
- $p^3 - 2p^2q + pq^2 - q^3 + 1 = 0$ (à l'horizontale)
- En limitant les tests aux valeurs pour lesquelles $p^2q \leq 250$, nous trouvons, pour $p/q = 7/4$, l'unique réponse **84** m
- *Selon des théorèmes (Thue, Mordell) sur les cubiques, l'équation a 3 solutions dont 2 imaginaires.
Borner le périmètre n'était pas nécessaire à l'unicité de la réponse*



Jour 2 – Problème 1 – La cantine

- Parmi les 15 enfants qui mangent des pâtes un jour sur deux, $25 - 20 = 5$ en ont mangé hier

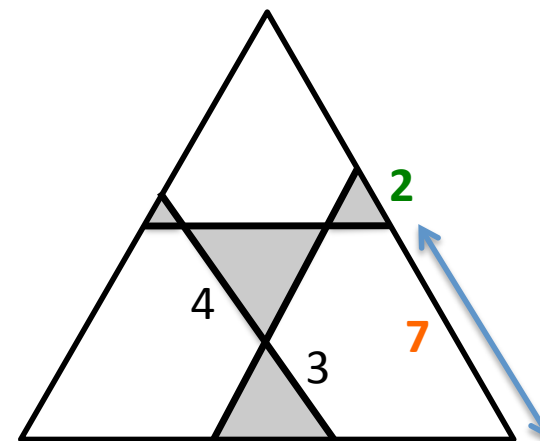
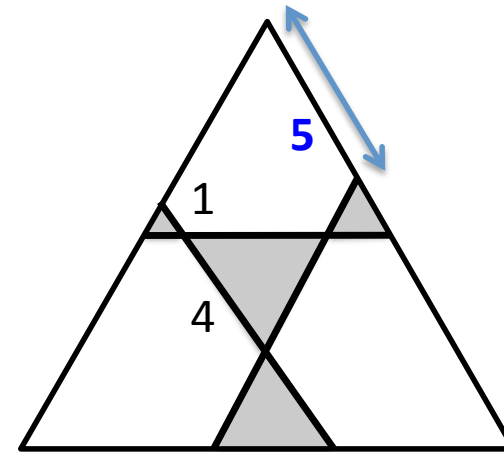
	Hier	Aujourd'hui
20 enfants	20	20
15 enfants	5	
Autres enfants	0	0
Total	25	

- Toujours parmi eux, $15 - 5 = 10$ en ont mangé aujourd'hui
- La réponse est $20 + 10 = 30$ enfants

	Hier	Aujourd'hui
20 enfants	20	20
15 enfants	5	10
Autres enfants	0	0
Total	25	30

Jour 2 – Problème 2 – Devine côté

- La longueur du segment en haut est $1 + 4 = 5$
- La longueur du segment en bas est $4 + 3 = 7$
- La réponse est $5 + 2 + 7 = 14$



Jour 2 – Problème 3 – Vrai ou faux ?

Sens de la marche



- Il y a 0 habitant de Bol devant le premier marcheur
- Il ment car $0 >$ « nombre de Pelg derrière lui » est impossible, il habite Bol



- Il y a au moins 1 habitant de Bol devant le dernier marcheur
- Il y a 0 habitant de Pelg derrière lui
- Il dit la vérité car $1 > 0$, il habite Pelg



Jour 2 – Problème 3 – Vrai ou faux ?

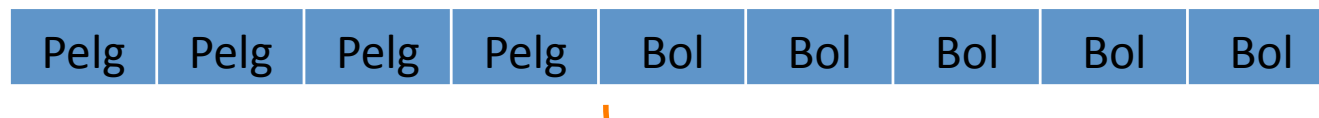
Sens de la marche



- Il y a 1 habitant de Bol devant le 2^{ème} marcheur
- Il y a au moins 1 habitant de Pelg derrière lui
- Il ment car $1 > \text{« nombre de Pelg derrière lui »}$ est impossible, il habite Bol



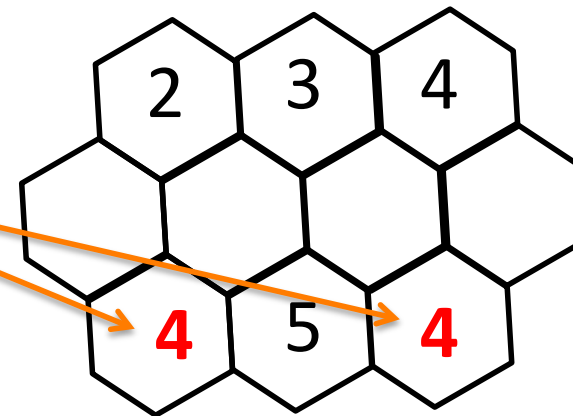
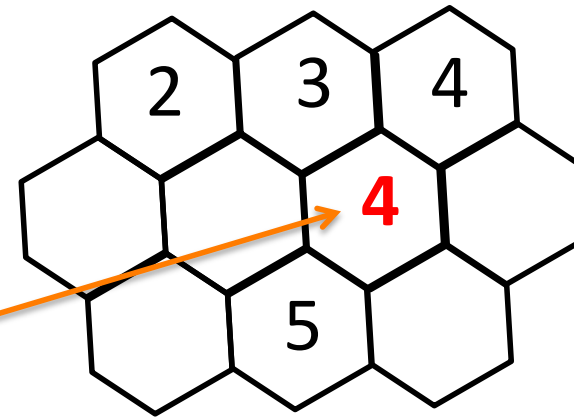
- Nous continuons avec l'avant-dernier marcheur, le 3^{ème}, etc.



- La réponse est **5** habitants de Bol

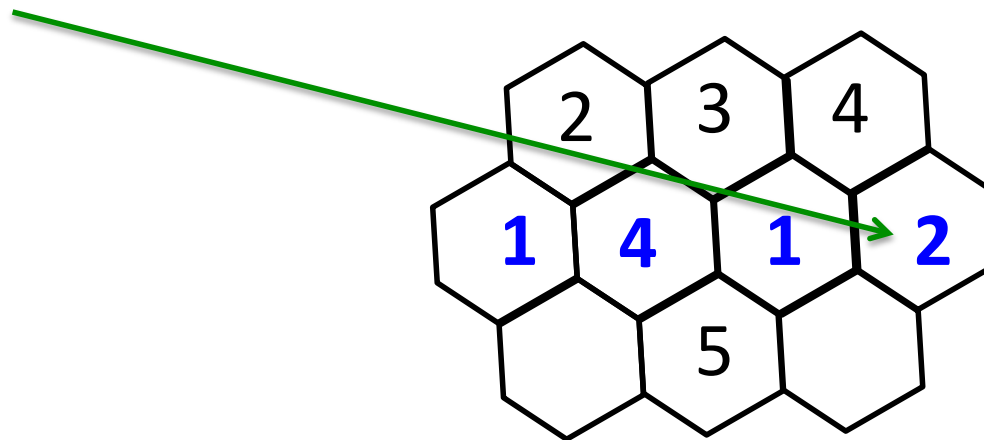
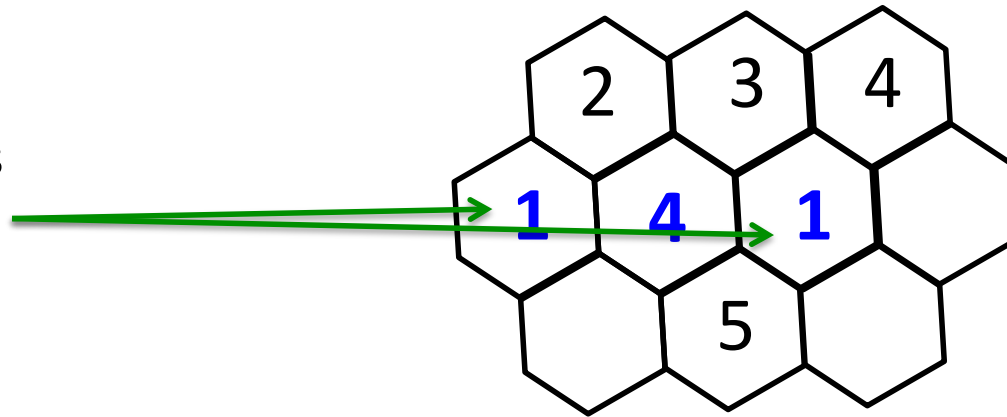
Jour 2 – Problème 4 – Les alvéoles d'abeilles

- Il faut un 4 autour du 5 déjà rempli
- Il n'est pas autour du 4 déjà rempli
- Il n'est pas ici car il n'y aurait pas 1, 2 et 3 autour de lui



Jour 2 – Problème 4 – Les alvéoles d'abeilles

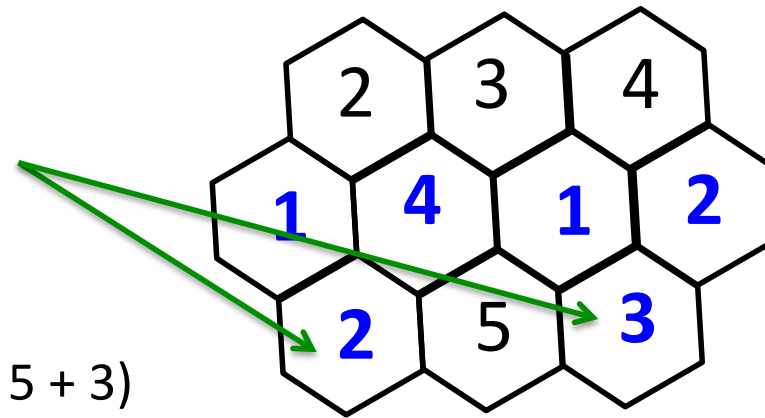
- Il faut un 1 autour des 2 et 3 déjà rempli
- Il faut un 2 autour du 4 déjà rempli



Jour 2 – Problème 4 – Les alvéoles d'abeilles

- Nous terminons le remplissage

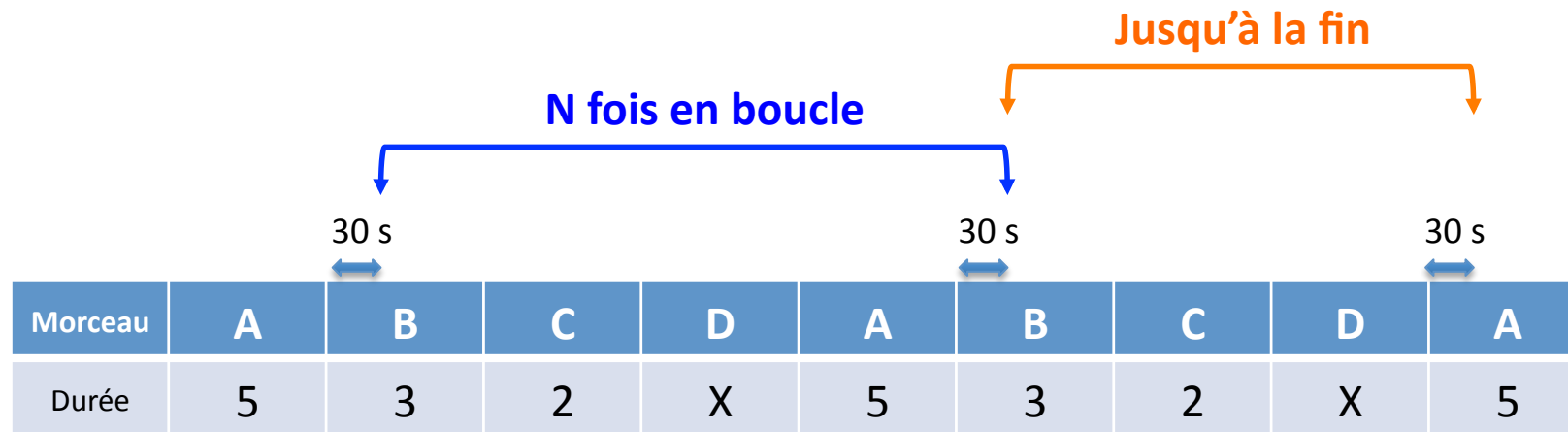
- La réponse est
 $(2 + 3 + 4) + (1 + 4 + 1 + 2) + (2 + 5 + 3)$
 $= 9 + 8 + 10 = \mathbf{27}$ grammes de miel



- *Nous vérifions les alvéoles autour desquelles nous n'avons pas raisonné*
- *La configuration est unique*

Jour 2 – Problème 5 – Les morceaux de musique

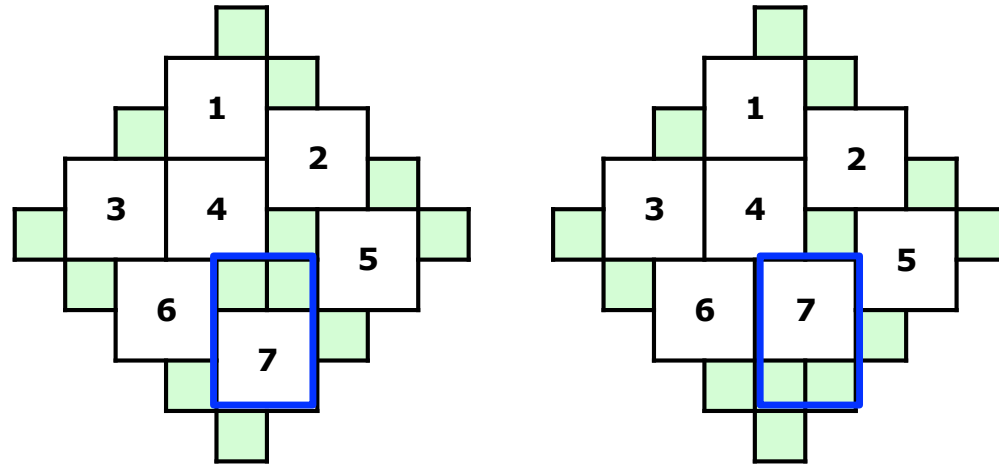
- Soit X la durée du morceau D demandée ($X \leq 9$)



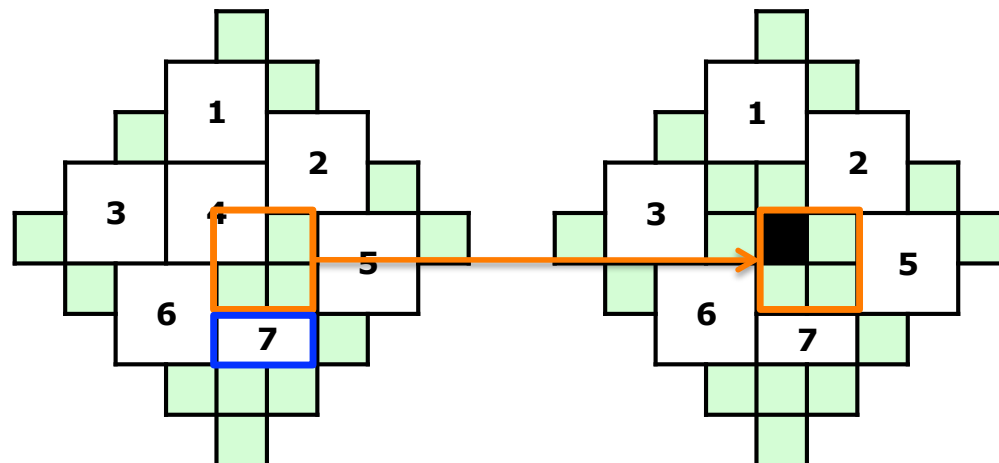
- $N(10 + X) + (5 + X) = 60$, soit $10N + (N+1)X = 55$
- $(N+1)X$ est impair, N est pair (strictement inférieur à 6 car $60 > 55$)
- $N \neq 0$ car $X = 55$ est impossible
- $N \neq 2$ car $3X = 35$ est impossible
- $N = 4$, $X = 3$ minutes

Jour 2 – Problème 6 – Le diamant

- Il faut au moins 7 petits carrés noirs
- Nous allons montrer que ce minimum est atteignable

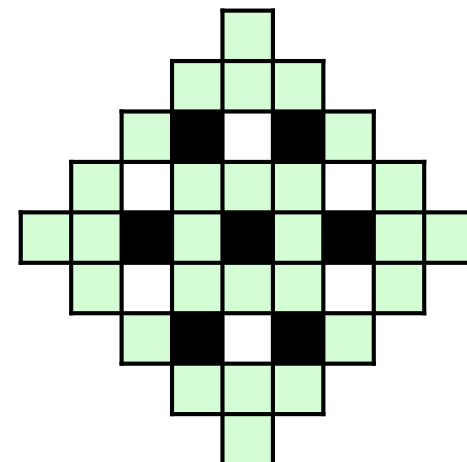
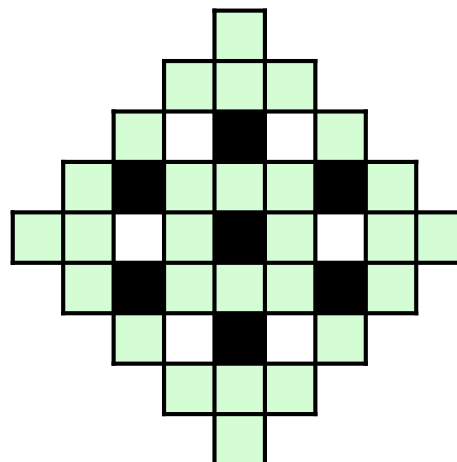
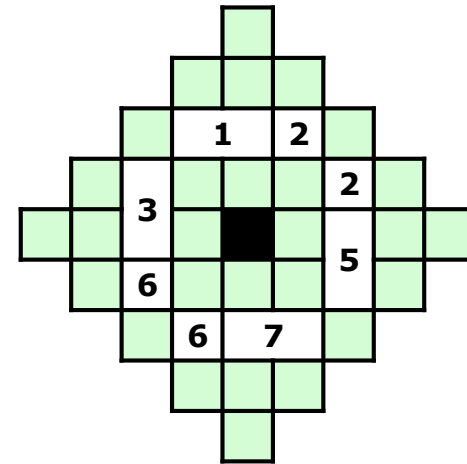
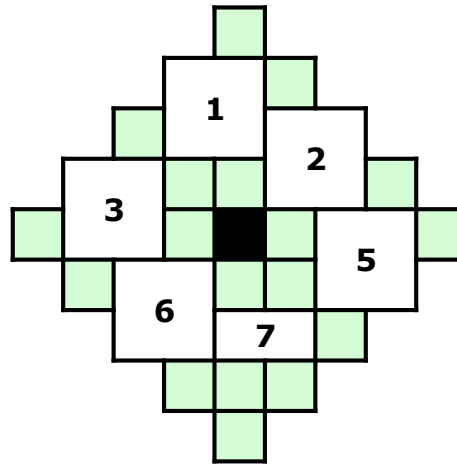


- Le petit carré au centre est noir



Jour 2 – Problème 6 – Le diamant

- La position des petits carrés est invariante par rotation
- 2 coloriages sont possibles (chacun est obtenu par rotation de l'autre)
- La réponse est **7**

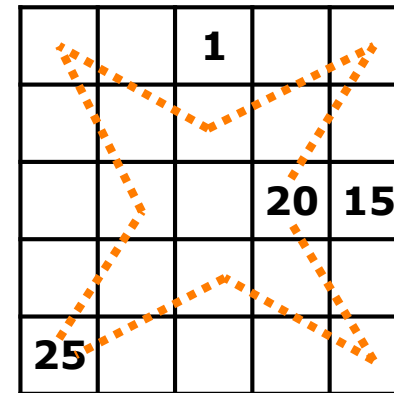


Jour 2 – Problème 7 – Le tour du monde

- Une semaine compte 7 jours
- Un jour compte $24 = 8 \times 3$ heures
- Une heure compte $60 = 6 \times 5 \times 2$ minutes
- Une minute compte $60 = (3 \times 5) \times 4$ secondes
- Une semaine compte $(3 \times 5) \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ secondes
- Il faut multiplier par 3 pour obtenir $(5) \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
puis par 2 pour obtenir $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
- Nous ne pouvons plus multiplier car $(11 \times (2 \times 3)) \times 7 > 80$ jours
- La réponse est $(2 \times 3) = 6$ semaines

Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- A partir d'un coin,
il existe 2 possibilités



- Nous numérotons les cases 25 à 20
dans le sens forcé, puis 20 à 18

23		1		21
		22		
	24		20	15
		18		
25				19

Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- Nous numérotons toutes les cases **16** atteignables à partir de la case 15
- Nous numérotons toutes les cases **17** atteignables à partir de la case 18
- Il n'y a qu'une possibilité pour relier une case 16 à une case 17
- Nous numérotons la case **14**

23		1	16	21
	17	22	17	
17	24		20	15
		18		
25			16	19

23		1	16	21
	17	22		
	24		20	15
		18		
25			14	19

Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- Il n'y a qu'une possibilité pour rentrer et sortir de cette case
- C'est la case numérotée 13 demandée

23		1	16	21
	17	22		
	24		20	15
		18		
25			14	19

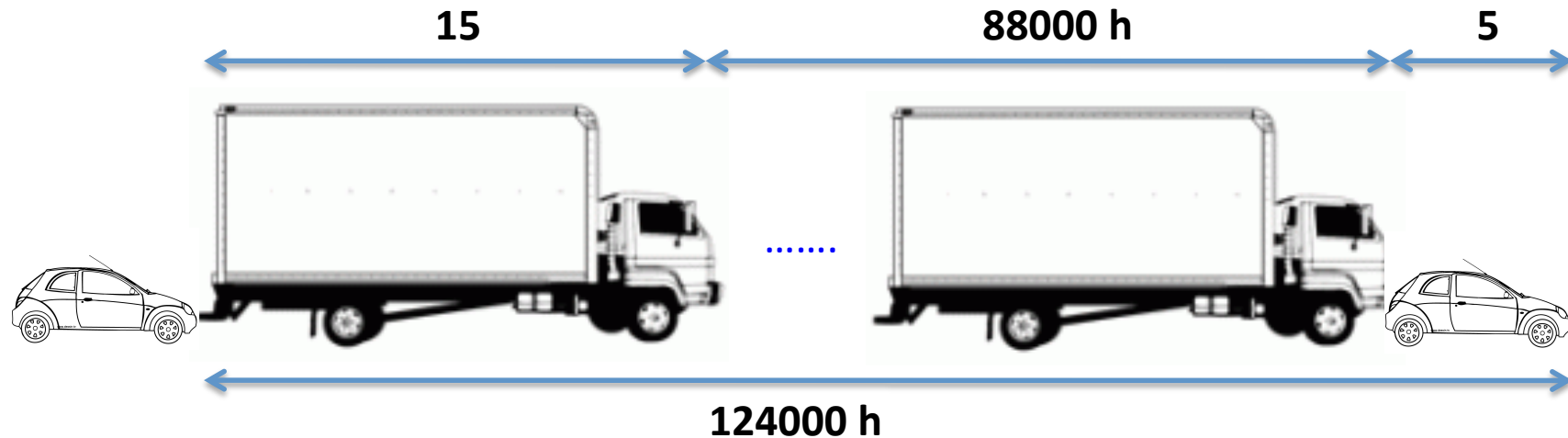
		1		
			20	15
	X			
25				

Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- *Nous numérotons les cases 11 à partir de 12, 2 à partir de 1, puis 3 jusqu'à 10*
- *Nous vérifions l'existence du chemin*
- *Il est unique*

23	6	1	16	21
12	17	22	7	2
5	24	11	20	15
10	13	18	3	8
25	4	9	14	19

Jour 2 – Problème 9 – Le dépassement



- Soit h le nombre d'heures écoulées
- $15 + 88000h + 5 = 124000h$ (en mètres)
- $h = 2/3600$ (en heures)
- La réponse est **2,00** secondes

Jour 2 – Problème 10 – Les pizzas

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < 1$
- Il faut découper une pizza en 2
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < 1$
- Il faut découper une deuxième pizza en 3
- $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- Il faut découper la troisième pizza en 4 ou en 5
- Il y a **2 réponses**, $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \times 360 = \mathbf{390}$ ou $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \times 360 = \mathbf{372}$ grammes

Jour 2 – Problème 11 – La coloration des nombres

- Comme les trois couleurs doivent être utilisées, la couleur de 2 (B) est différente de celle de 1 (A)
- Si 3 est de couleur B, alors 5, 7 et tous les nombres suivants sont de couleur B
- 4 n'est pas de couleur A, ni de couleur B
- 6 n'est pas de couleur A, ni de couleur C
- Il y a **6** (permutations des trois couleurs) coloriages de la forme ABB...
- 3 n'est pas de couleur A
sinon la couleur C ne serait pas utilisée

AB

ABB?B?BBBB...

ABB**A**B?BBBB...

ABB**B**BBBBB...

ABBCB**A**BBBB...

ABBC**B**BBBB**B**...

ABBCBBBBBB...

ABC

Jour 2 – Problème 11 – La coloration des nombres

- Si 4 et 5 sont de couleurs différentes, alors on aboutit toujours à une contradiction
- Si 4 et 5 sont de couleur A
- Si 4 et 5 sont de couleur B
- Si 4 et 5 sont de couleur C, alors 6 n'est pas de couleur A, ni de couleur B
- En tenant compte des permutations des trois couleurs, il y a au total $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ coloriages différents des 120 nombres

ABCAB

ABCAC

ABCBAB

ABCBCB?B

ABCCAAA

ABCCB?B

ABCAA...

ABCBB...

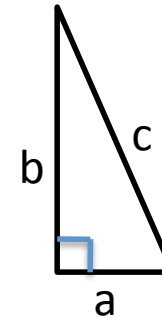
ABCCCAC...

ABCCCBCC...

ABCCCC...

Jour 2 – Problème 12 – Les deux prés

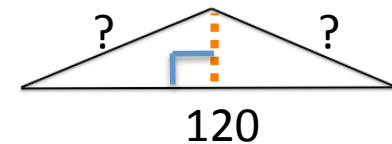
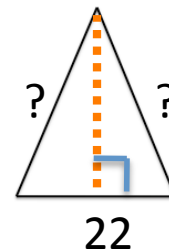
- Deux triangles rectangles ayant
mêmes hypoténuse c
et aire $ab/2$
sont identiques
car ils ont mêmes côtés de l'angle droit a et b
(déterminés par leurs somme et différence)



$$(a \pm b)^2 = c^2 \pm 4(ab/2)$$

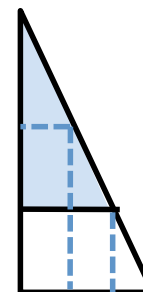
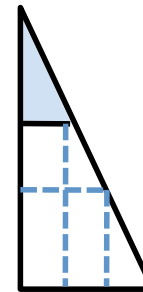
Jour 2 – Problème 12 – Les deux prés

- Les quatre triangles rectangles sont identiques (côtés 11, 60 et ?)
- $60^2 + 11^2 = 60^2 + 121 = 60^2 + 2 \times 60 + 1^2 = 61^2$
- L'hypoténuse (?) est 61
- La réponse, unique, est **61** mètres



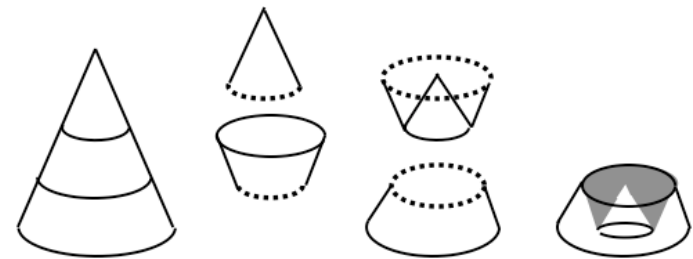
Jour 2 – Problème 13 – Le presse-citron

- Le volume du morceau du haut est
 $270 \times (1/3) \times (1/3)^2 = 10 \text{ cm}^3$
- Le volume total des morceaux
du haut et du milieu est
 $270 \times (2/3) \times (2/3)^2 = 80 \text{ cm}^3$



Jour 2 – Problème 13 – Le presse-citron

- Le volume du morceau du milieu est $80 - 10 = 70 \text{ cm}^3$
- La réponse est $70 - 10 = 60 \text{ cm}^3$



Jour 2 – Problème 14 – Le caddy

- Jusqu'à 70 inclus, nous comptons 10 multiples de 7
- Parmi les 5 pairs, nous pouvons en retenir au plus 2
- Le prix le plus grand est au moins 70
- Nous allons montrer que ce minimum est atteignable
- Nous devons retenir un multiple pair de 7 autre que 70
- Et 3 multiples impairs de 5 autres que 35 et 70

						Retenus
7	21	35	49	63	70	6
14	28	42	56			1
5	15 15	25	45 45	55	65	3

Jour 2 – Problème 14 – Le caddy

- **Si** nous retenons 42, alors il ne manque plus de multiple de 3, et nous devons retenir les 4 nombres 5, 25, 55 et 65 sauf un

						Retenus
7	21	35	49	63	70	6
		42				1
5		25		55	65	3

- $7 + 21 + 35 + 49 + 63 + 70 + 42 + 5 + 25 + 55 + 65 = 437$
- 437 est congru à 8 modulo 11
- 5, 25, 55 et 65 ne le sont pas
- D'où une contradiction

Jour 2 – Problème 14 – Le caddy

- Nous retenons
 - 7, 21, 35, 49, 63, 70 de total 245 (congru à -8 modulo 11)
 - Un nombre parmi 14, 28 et 56 (congru à **3**, 6 ou **1** modulo 11)
 - 15 ou 45
 - Deux nombres parmi 5, 25, 55 et 65

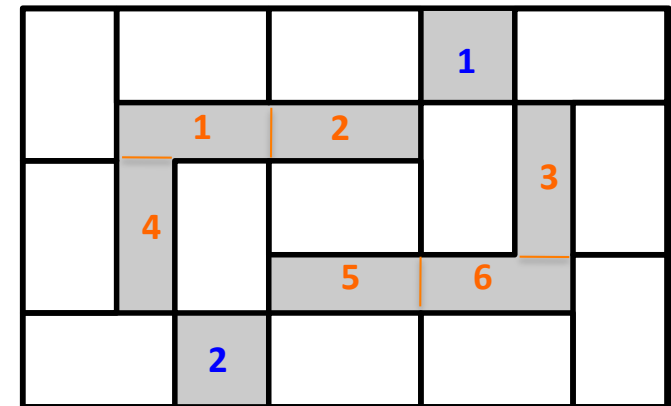
Somme Modulo 11	5 et 25	5 et 55	5 et 65	25 et 55	25 et 65	55 et 65
15	1	9	8	7	6	3
45	9	6	5	4	3	0

- D'où **2 réponses**
 - 7, 21, 35, 49, 63, 70, 14, 45, 5, 65 de total **374**
 - 7, 21, 35, 49, 63, 70, 56, 15, 25, 55 de total **396**

Jour 2 – Problème 15 – Le drapeau

- Soit X le rapport de la longueur à la largeur des petits rectangles et du grand rectangle
- $(3X + 2)/(2X + 1) = X$
- $X^2 - X - 1 = 0$, X est le nombre d'or $\Phi \approx 1,618$

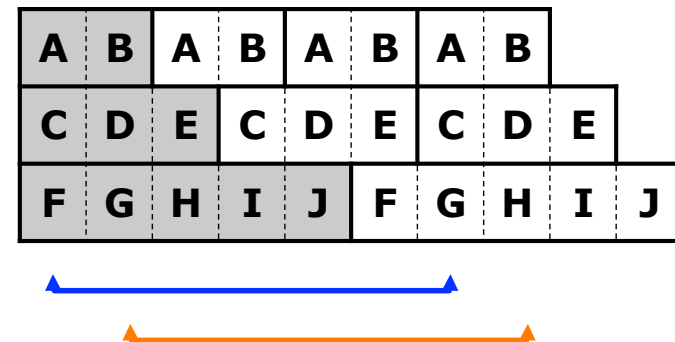
- L'aire grise est 2×15^2
plus $6 \times 15\Phi \times 15(\Phi-1) = 6 \times (\Phi^2 - \Phi) \times 15^2$
- La réponse, unique, est $8 \times 15^2 = \mathbf{1800} \text{ cm}^2$



- *Note: si l'on considère que les notions de longueur et de largeur sont interchangeables (italien, russe), alors il y a une deuxième solution, ≈ 688*

Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

- Les sommes $(A+C+\textcolor{blue}{F})$ et $(A+C+\textcolor{blue}{G})$ sont forcément différentes, une et une seule est 10
- Les sommes $(B+D+\textcolor{orange}{G})$ et $(B+D+\textcolor{orange}{H})$ sont forcément différentes, une et une seule est 10
- Les 4 autres sommes sont 10



Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

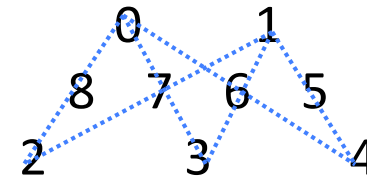
- La somme 10 est obtenue dans huit cas
- Seuls 0 et 1 sont dans quatre cas
- Seuls 2 et 3 sont dans trois cas
- A et B sont chacune dans trois sommes 10
- **Si** $A = 2$,
alors elle est dans un cas avec 0, 1 et 3,
B ne peut plus être dans trois cas
- De même **si** $A = 3$
- Et vice versa **si** $B = 2$ ou 3
- **A et B sont 0 et 1**

0	0	0	0	1	1	1	2
1	2	3	4	2	3	4	3
9	8	7	6	7	6	5	5

	0			1			2
	2			2			3
	8			7			5

Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

- 9 n'est plus dans aucune somme 10



- Toutes les lettres sauf G sont dans au moins une somme 10
- G = 9**

0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0			
C	D	E	C	D	E	C	D	E		
F	G	H	I	J	F	G	H	I	J	



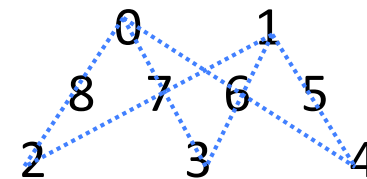
Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

- **F et H**, utilisés deux fois dans une somme 10, **sont 6 et 7**
- **I et J** (une fois) **sont 5 et 8**
- E est dans une somme 10 avec 6 et avec 7 (F et H)
- **E = 3**
- Nous terminons le tableau de deux façons
- La réponse, unique, est **41**

0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0				
C	D	E	C	D	E	C	D	E			
F	9	H	I	J	F	9	H	I	J		

#10

#10



0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0				
4/2	2/4	3	4/2	2/4	3	4/2	2/4	3			
6/7	9	7/6	5/8	8/5	6/7	9	7/6	5/8	8/5		
	12					13		8	8		
10	/	10	10	10	10	/	10	/	/		
	13					12		11	5		

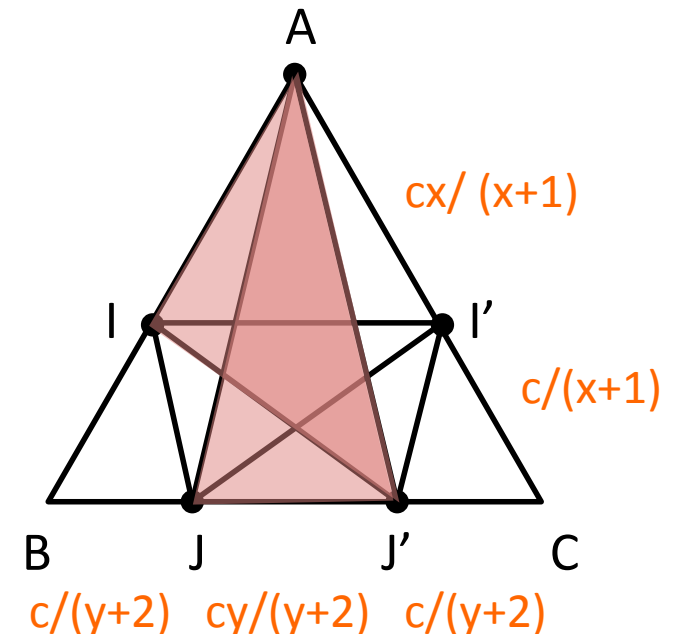
Jour 2 – Problème 17 – Les puissances

- En cherchant les puissances de 2 commençant par 10, nous trouvons
 - $2^{10} = 1\,024$
 - $2^{20} = 1\,048\,576$
 - $2^{30} = 1\,073\,741\,824$
 - $2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776 \approx 1,10 \cdot 10^{12}$ donné par l'énoncé
 - $2^{103} \approx 10\,141 \dots \approx 1,01 \cdot 10^{31}$ donné par l'énoncé
- Après $2^{113} \approx 1,04 \cdot 10^{34}$, $2^{123} \approx 1,06 \cdot 10^{37}$ et $2^{133} \approx 1,09 \cdot 10^{41}$, la candidate suivante est $2^{133+(103-40)} = 2^{196}$
- $2^{196} = (2^{103})^2 / 2^{10} > 1,01^2 / 1,024 \cdot 10^{59} > 1,02 / 1,024 \cdot 10^{59} > 0,995 \cdot 10^{59}$
- $2^{196} < 1,0142^2 / 1,024 \cdot 10^{59} < 1,029 / 1,024 \cdot 10^{59} < 1,005 \cdot 10^{59}$ ($1,42^2 < 6$)
- La réponse est **196**

Jour 2 – Problème 18 – Le panneau

- Nous supposons que le côté c du grand triangle est tel que l'aire est 1
- Nous multiplierons la réponse ainsi trouvée par 204
- Soient $x = IA/BI$ et $y = JJ'/BJ'$

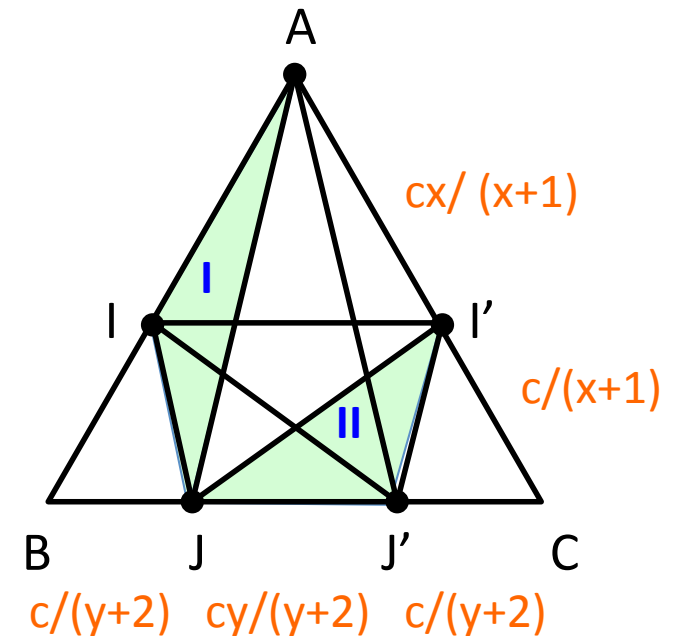
- L'aire du triangle **AIJ** ou **AI'J'** est $x/((x+1)(y+2))$ (I)
- Celle du triangle **AIJ'** ou **AI'J** est plus grande (base commune, hauteur plus grande)
- L'aire du triangle **IJJ'** ou **I'JJ'** est $y/((x+1)(y+2))$ (II)
- Celle du triangle **AJJ'** est plus grande (base commune, hauteur plus grande)



- Les aires des triangles **AI'I'**, **I'I'J** ou **I'I'J'** ne sont pas fonction de y

Jour 2 – Problème 18 – Le panneau

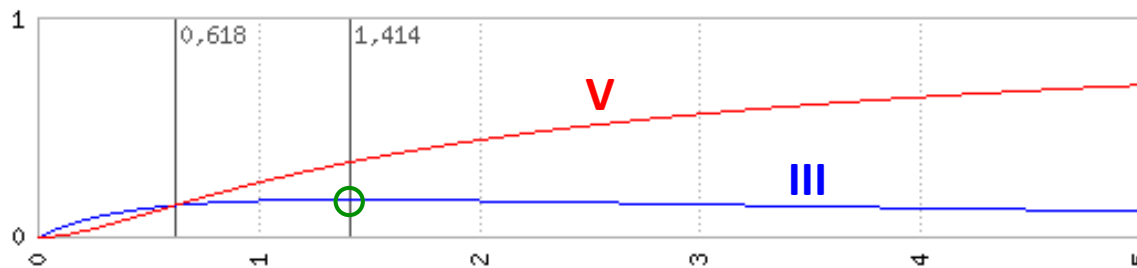
- Pour **AII** ou **AI'J'**, $x/((x+1)(y+2))$ **(I)**
- Pour **IJJ'** ou **I'JJ'**, $y/((x+1)(y+2))$ **(II)**
- Pour x donné, si $y \leq x$,
il faut augmenter y
pour rapprocher **(II)** de **(I)**
- Puis pour $x \leq y$, il faut diminuer
 $(y+2)$ soit y pour augmenter **(I)**
- $y = x$
- Nous retenons $x/((x+1)(x+2))$ **(III)**



*Et symétriques par
rapport à la verticale*

Jour 2 – Problème 18 – Le panneau

- L'aire du triangle **II'** ou **II'J'** $x/(x+1)^2$ **(IV)** est plus grande que $x/((x+1)(x+2))$ **(III)**



- L'aire du triangle **AII'** $x^2/(x+1)^2$ **(V)** croît de 0 à 1
- $d(\text{III})/dx = (2-x^2)/((x+1)^2(x+2)^2)$
- (III)** part de 0, passe au dessous de **(V)** en $1/\Phi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,618$ ($x^2+x-1=0$) et croît jusqu'à un maximum en $\sqrt{2} \approx 1,414$
- $\sqrt{2}/((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)) = (3-2\sqrt{2}) \approx 0,172$
- La réponse est $\approx 204 \times 0,172 = 35,088 \approx \mathbf{35} \text{ dm}^2$

