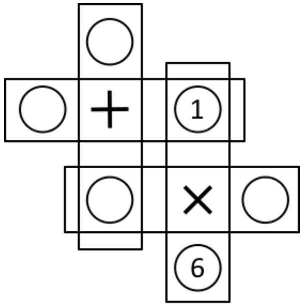
31e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

Finale Internationale des 30 et 31 août 2017

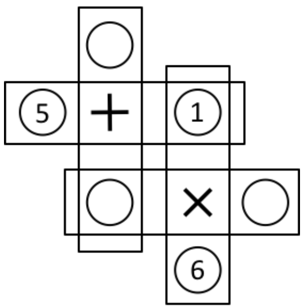
Diapo**RAMA** des solutions

Jour 1 – Problème 1 – Quatre fois

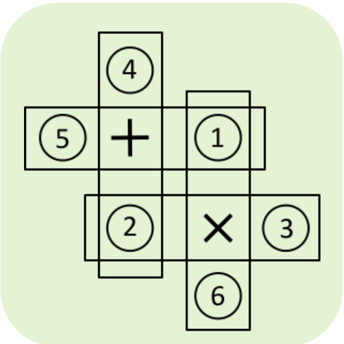
- Pour que la 2ème multiplication soit possible, le 1 doit être multiplié par le 6



- Le résultat est 6
- Le 1 est additionné avec le 5

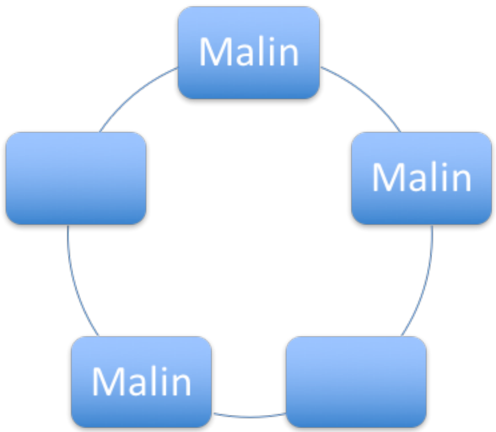


- Le 2 est multiplié par le 3 et additionné avec le 4



Jour 1 – Problème 2 – Les lapins malins

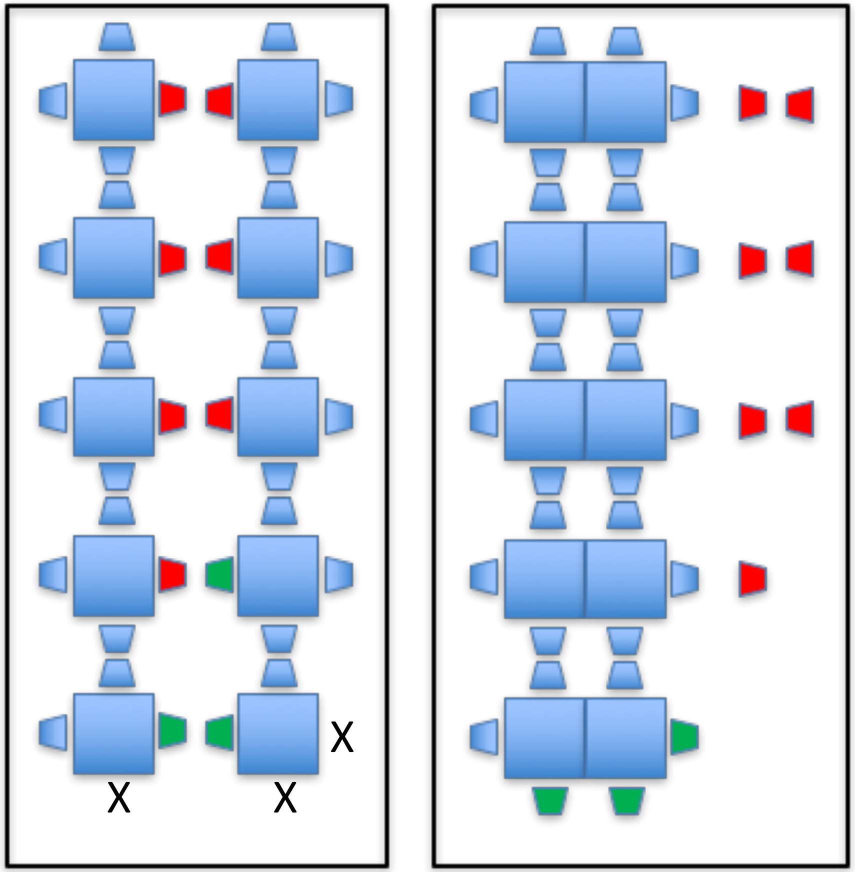
- Il n'y a pas de menteur entre 2 menteurs, sinon il dirait la vérité
- Il n'y a pas 3 menteurs à la suite
- Il n'y a pas 2 lapins disant la vérité à la suite, sinon ils mentiraient
- La réponse est **3** lapins malins



Jour 1 – Problème 3 – La pizzeria

- Chaque fois que Luigi groupe 2 tables carrées pour obtenir une table rectangulaire, il gagne 2 chaises
- Il récupère 5 x 2 = 10 chaises

- Comme il lui en manquait 3, il lui en reste 10 – 3 = **7** en trop



Jour 1 – Problème 4 – Le quizz

- Si la réponse à la question 3 est A, les réponses aux questions 1 et 2 sont C
- D’où une contradiction car la réponse à la question 2 est fausse

- La réponse à la question 3 ne peut pas être C donc elle est B

A est entouré	A/ 2	B/ 0	C/ 1	fois dans le cadre
B est entouré	A/ 0	B/ 1	C/ 2	fois dans le cadre
C est entouré	A/ 2	B/ 1	C/ 0	fois dans le cadre

Jour 1 – Problème 4 – Le quizz

- Si la réponse à la question 1 est C, la réponse à la question 2 est A
- D'où une contradiction car la réponse à la question 2 est fausse

- La réponse à la question 2 est C (entouré 1 fois selon question 3)

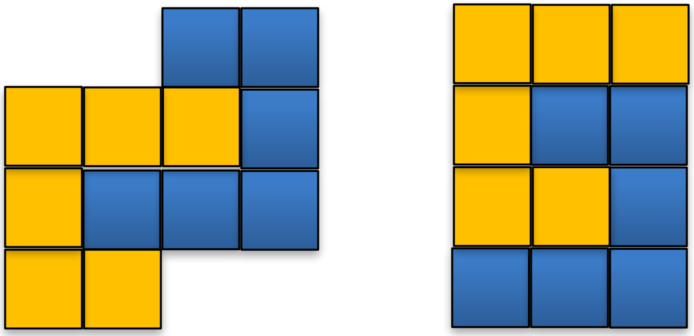
A est entouré	A/ 2	B/ 0	C/ 1	fois dans le cadre
B est entouré	A/ 0	B/ 1	C/ 2	fois dans le cadre
C est entouré	A/ 2	B/ 1	C/ 0	fois dans le cadre

Jour 1 – Problème 4 – Le quizz

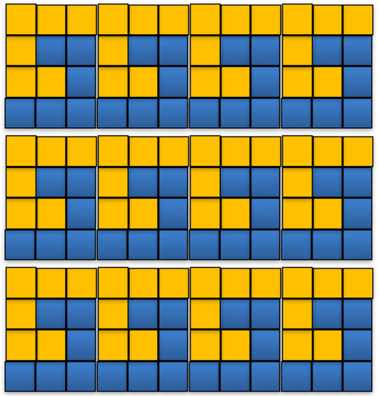
- La réponse à la question 1 est B (entouré 2 fois selon question 2)

A est entouré	A/ 2	B/ 0	C/ 1	fois dans le cadre
B est entouré	A/ 0	B/ 1	C/ 2	fois dans le cadre
C est entouré	A/ 2	B/ 1	C/ 0	fois dans le cadre

Jour 1 – Problème 5 – Le carré



- En bouchant le creux d'une pièce, il y a deux façons de placer une autre pièce, dont une seule permet de commencer un coin



- Le problème revient à faire un carré avec des rectangles 3 x 4
- Il en faut au moins 12
- La réponse est 12 x 2 = **24** pièces

Jour 1 – Problème 6 – La prochaine

- L'écart entre les deux années est un multiple de 2, 3 et 4 donc d'au moins 12

- La prochaine année ayant les trois propriétés est 2017 + 12 = **2029**

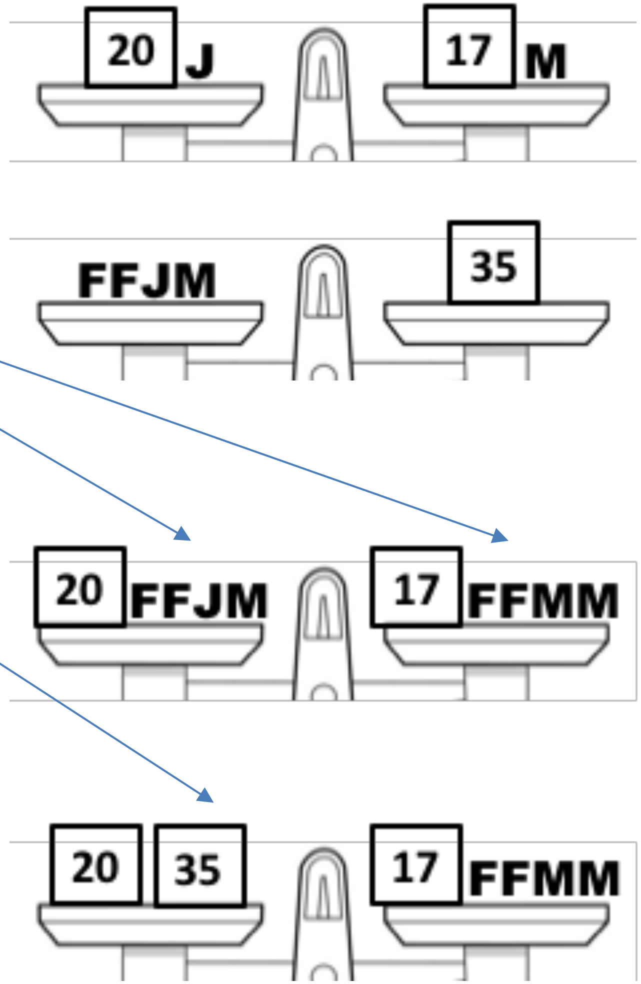
- *On vérifie que 2029 + 1 = 2030 est divisible par 2,*
  2029 + 2 = 2031 par 3 (somme des chiffres 6 divisible par 3)
  et 2029 + 3 = 2032 par 4 (32 divisible par 4)

Jour 1 – Problème 7 – La balance

- On ajoute F F M sur chaque plateau de l'équilibre en haut
- On remplace F F J M par 35

- 20 + 35 = 17 + (2 x (F M))
- 20 + 35 – 17 = 2 x (F M)
- 38 = 2 x (F M)

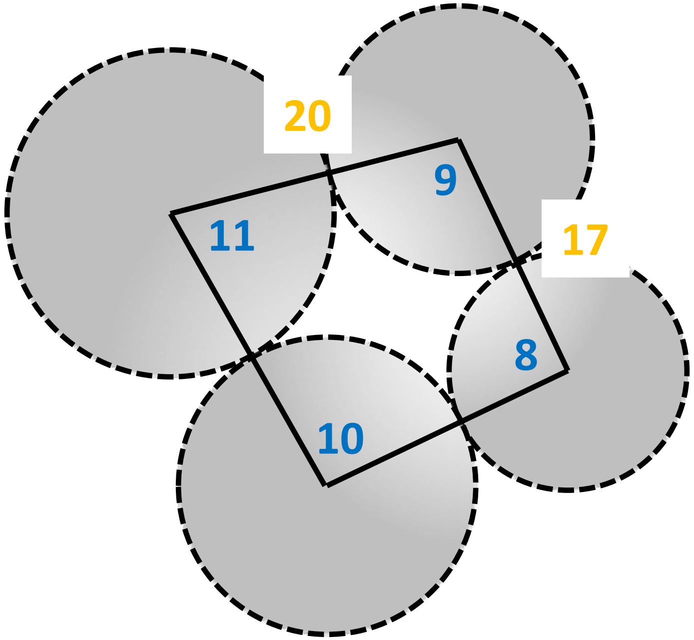
- D'où la réponse **19** grammes



Jour 1 – Problème 8 – Le drone

- 20 n’est pas la somme de deux rayons au moins 12 et au plus 8, sinon il y aurait au moins 5 entiers consécutifs
- Ni de deux rayons 10
- 20 est la somme des deux rayons 11 et 9

- Au sommet commun, le rayon n’est pas 11, sinon il y aurait au moins 6 entiers consécutifs (de 17 – 11 = 6 à 11)
- La réponse est **9** cm



Jour 1 – Problème 9 – Devine âge

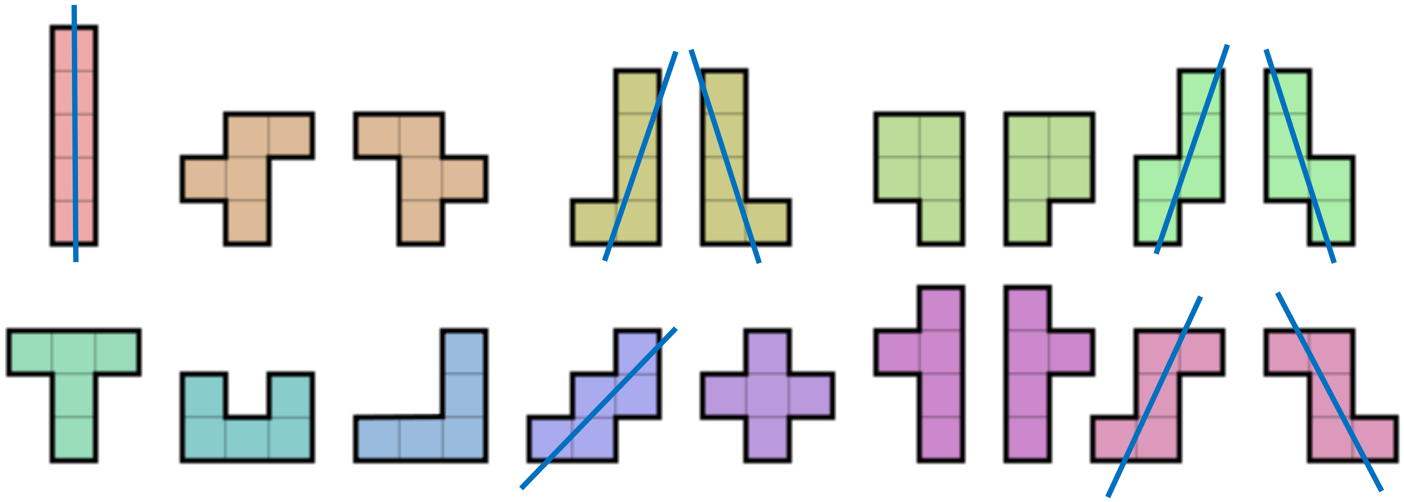
- L'âge est de la forme ab^2 (a sans diviseur autre que 1 et lui, b idem)
- Les 6 diviseurs sont 1, a, b, ab, b^2 et ab^2
- Comme a et b divisent 72, ce sont 2 et 3

- **Si** a = 2 et b = 3, les 6 diviseurs sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18
- Comme 72 est divisible par 8, 3 des 4 diviseurs sont 2, 6 et 18, mais leur produit est déjà plus grand que 72

- a = 3 et b = 2, l'âge d'Agathe est 3×2^2 = **12** ans
- *Les 6 diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12*
- *Le produit 72 est obtenu avec 1, 2, 3 et 12 ou 1, 3, 4 et 6*

Jour 1 – Problème 10 – Les pentaminos linéaires

- On compte **8** pentaminos linéaires, « barrés » ci-après



Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- La somme des 9 chiffres utilisés a le même reste dans la division par 9 que 2017, 1
- La somme des entiers de 0 à 9 étant 45, divisible par 9, le chiffre 8 n'est pas utilisé

- **Si** la retenue des unités est 1 et celle des dizaines est r, la somme des 9 chiffres est (20 – r) + 10r + 17 = 37 + 9r
- r = 0, ce qui est impossible (dizaines)

- La retenue des unités est 0

(2)	(r)	(1)	
	?	?	?
	?	?	?
	?	?	?
2	0	1	7

Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- La somme des 9 chiffres est
  $(20 - r) + (10r + 1) + 7 = 28 + 9r$, $r = 1$
- **Si** le 19 de la colonne des centaines est obtenu avec 9, 6 et 4, le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 5, 2 et 0
- Un seul nombre divisible par 11 est possible, 935
- Le 19 de la colonne des centaines est obtenu avec 9, 7 et 3 (pas de 8)

(2)	(r)	(0)	
	?	?	?
	?	?	?
	?	?	?
2	0	1	7

(2)	(1)	(0)	
	9	7	5
	6	3	2
	4	1	0
2	0	1	7

Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- **Si** le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 5, 2 et 0
- Un seul nombre divisible par 11 est possible, 715

(2)	(1)	(0)	
	9	**6**	**5**
	7	**4**	**2**
	3	**1**	**0**
2	**0**	**1**	**7**

Jour 1 – Problème 11 – Trois fois trois

- Si le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 4, 2 et 1, les nombres divisibles par 11 possibles sont 902, 704 et 352
- D’où la 1ère réponse, **961** (avec 704 et 352)

(2)	**(1)**	**(0)**	
	9	**6**	**4**
	7	**5**	**2**
	3	**0**	**1**
2	**0**	**1**	**7**

- Si le 7 de la colonne des unités est obtenu avec 6, 1 et 0, les nombres divisibles par 11 possibles sont 946, 726 et 341
- D’où la 2ème réponse, **950** (avec 726 et 341)

(2)	**(1)**	**(0)**	
	9	**5**	**6**
	7	**4**	**1**
	3	**2**	**0**
2	**0**	**1**	**7**

Jour 1 – Problème 12 – Les briques

- Raisonnons sur la parité du nombre de briques d'une pile
- Thomas est parti de 27, impair
- Il n'a jamais assemblé deux nombres impairs
- Les quatre nombres autres que 7 sont tous pairs
- Ce sont forcément 2, 4, 6 et 8
- La réponse est **8**

Assemble		Paires	Impaires
Pair	Pair	- 1	=
Pair	Impair	- 1	=
Impair	Impair	+ 1	- 2

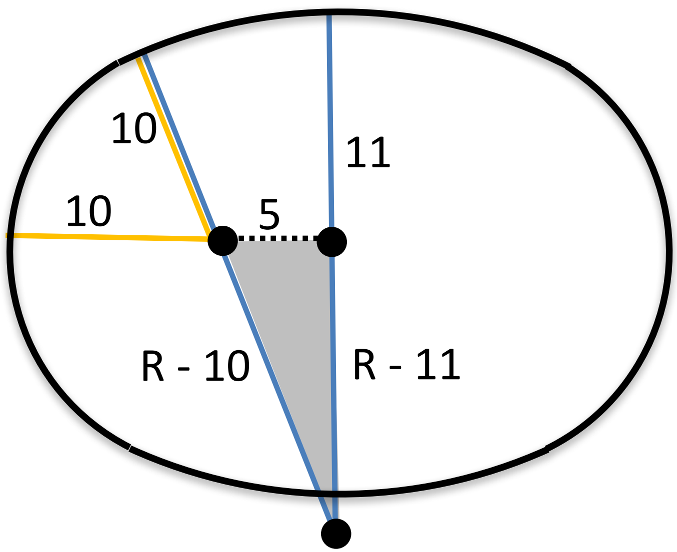
Scinde	Paires	Impaires
Pair	+ 1	=
Impair	+ 1	=

- *Vérifions la possibilité :*
  27 → 9 18 → 6 9 12 → 4 6 8 9 → 3 4 6 6 8 → 2 3 4 4 6 8 → 2 4 6 7 8

Jour 1 – Problème 13 – Le ballon de rugby

- On applique Pythagore dans le triangle rectangle dont les sommets sont les centres de l'ovale, d'un grand et d'un petit arcs de cercle
- $(R - 11)^2 + 5^2 = (R - 10)^2$
- $5^2 = (R - 10) + (R – 11) = 2R - 21$

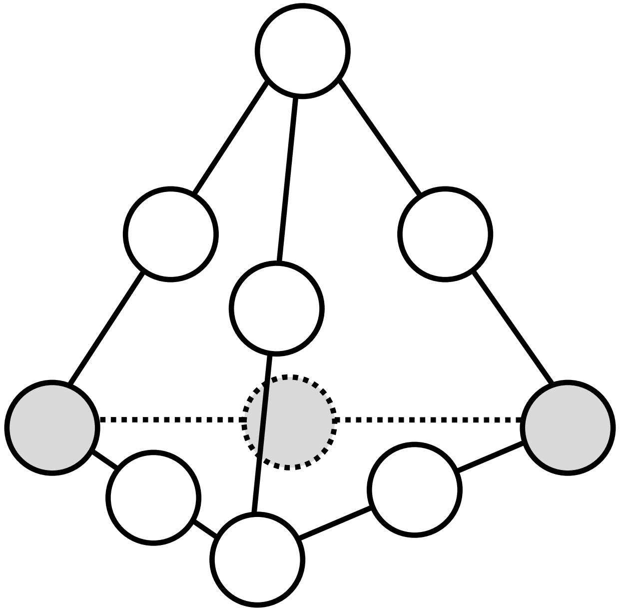
- La réponse est **23** cm



Jour 1 – Problème 14 – Le tétraèdre numéroté

- Soient S la somme des 4 sommets et M celle des 6 milieux d'arête
- S + M est la somme des entiers de 1 à 10, 55
- 3S + M est la somme des arêtes, (5 x 20) + (1 x 17) = 117
- S = 31 et M = 24

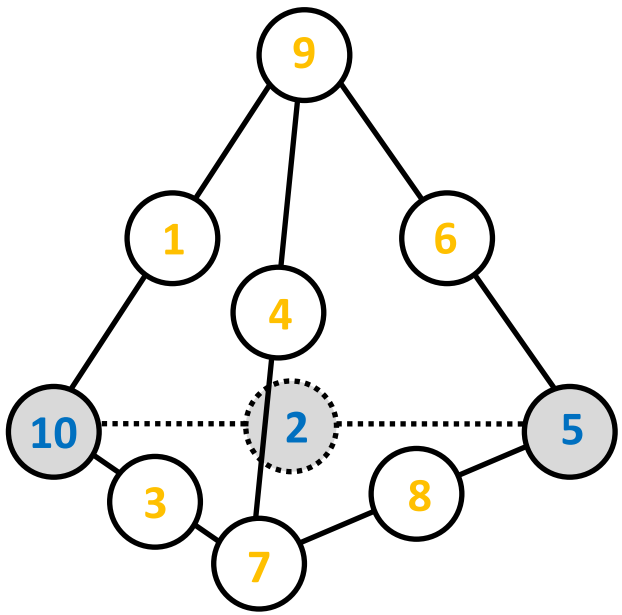
- Les sommets sont 10 8 7 6, 10 9 7 5 ou 10 9 8 4



Jour 1 – Problème 14 – Le tétraèdre numéroté

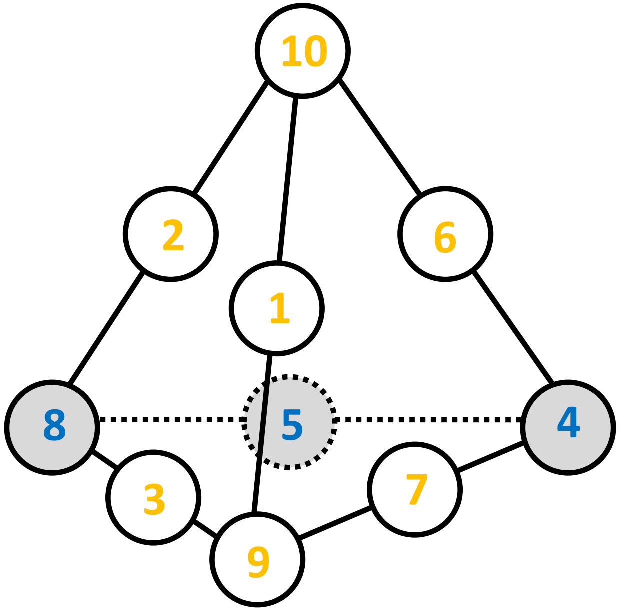
- Si les sommets sont 10 8 7 6, 7 et 6 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, deux fois 7)
- Ils sont complétés par 4, que l'on trouve aussi entre 10 et 6

- Si les sommets sont 10 9 7 5, 10 et 5 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, deux fois 5)
- Ils sont complétés par 2, d'où une 1ère réponse, **100**, car on peut terminer



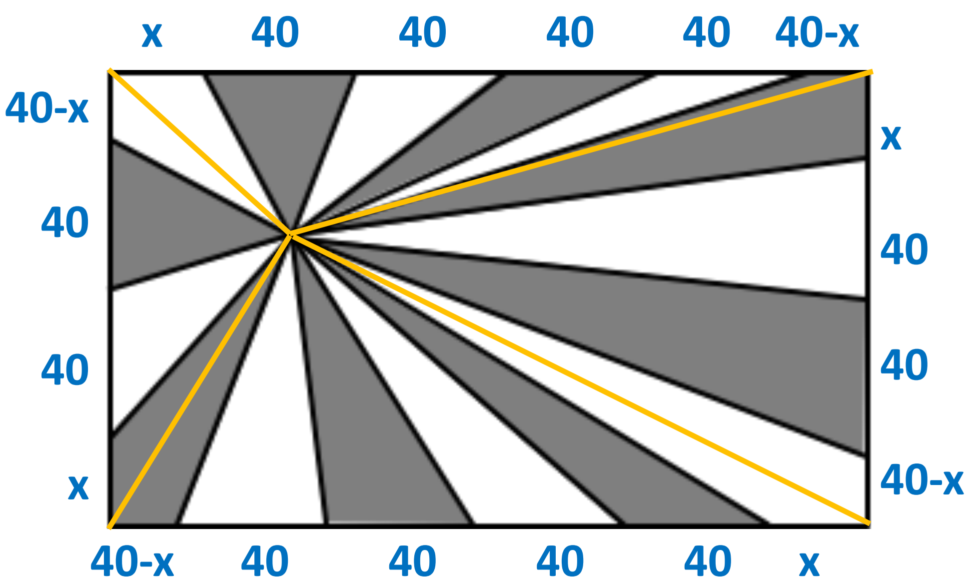
Jour 1 – Problème 14 – Le tétraèdre numéroté

- Si les sommets sont 10 9 8 4, 8 et 4 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, deux fois 8)
- Ils sont complétés par 5, d'où la 2ème réponse, **160**, car on peut terminer



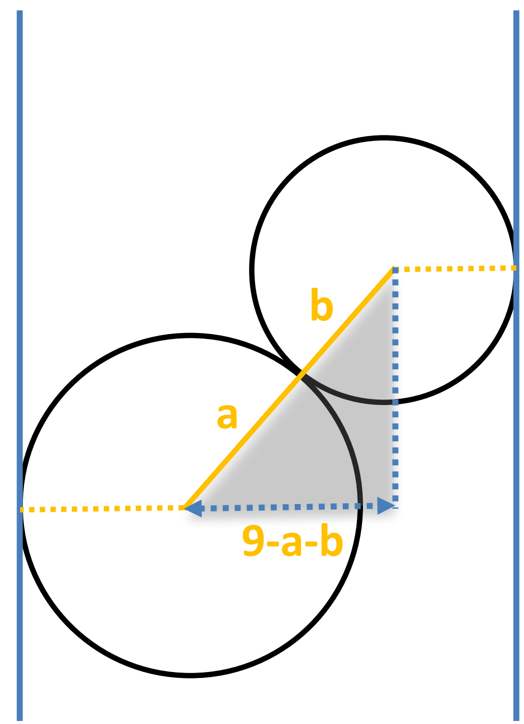
Jour 1 – Problème 15 – Le drapeau

- Le total des aires grises des deux grands triangles basés sur les longueurs est 120(120–x)/2
- Celui des deux grands triangles basés sur les largeurs est 200(40+x)/2
- Leur somme est 40x + 11200
- Le total des aires blanches est 24000 - (40x + 11200)
- 2(40x + 11200) – 24000 = 240 donne la réponse x = **23** cm



Jour 1 – Problème 16 – Les boules de Noël

- Pour les deux boules en contact avec le fond ou le couvercle, les hauteurs sont deux « demi » entiers
- Lorsque deux boules sont en contact, la hauteur est (Pythagore)
  $\sqrt{(a+b)2 - (9-a-b)2} = 3\sqrt{(2a+2b-9)}$
- La (boule de diamètre) 9
  est en contact avec la seule 4
  (sinon, on introduirait $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ ou $\sqrt{7}$)
- Puis la 4 avec la 6
  (sinon, on introduirait $\sqrt{2}$)
- Et enfin la 6 avec la 7

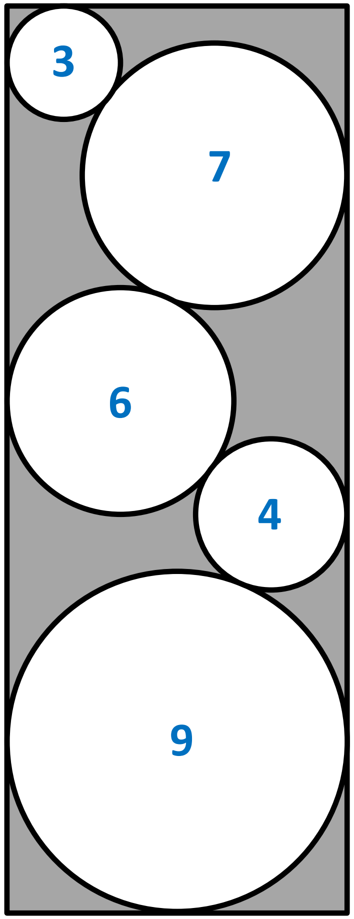


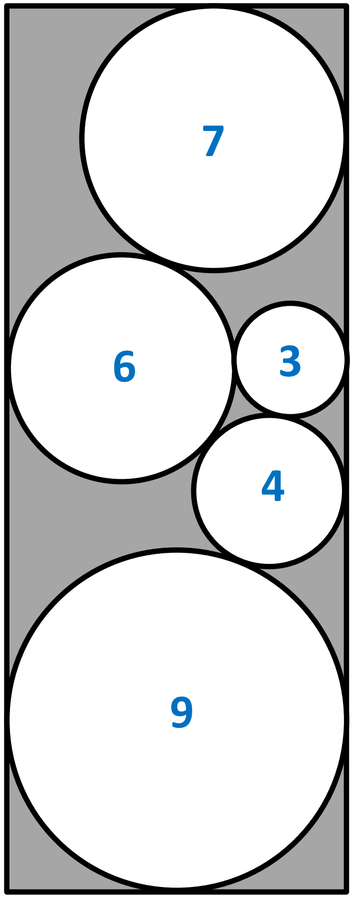
Jour 1 – Problème 16 – Les boules de Noël

- La 3 peut être placée à deux endroits

- 4,5 + 6 + 3 + 6 + 3 + 1,5 = 24
- 4,5 + 6 + 3 + 6 + 3,5 = 23

- La hauteur de la boîte est **23** ou **24** cm





Jour 1 – Problème 17 – L'anniversaire du Mage Hic

- Les nombres obtenus sont les $n^2 + n + 41$ à partir de $n = 1$

- Jusqu'à $n = 39$ compris, on n'obtient que des nombres premiers :
  43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601
- Pour $n = 40$, on obtient 41^2

- Le nombre de spectateurs est au maximum **39**

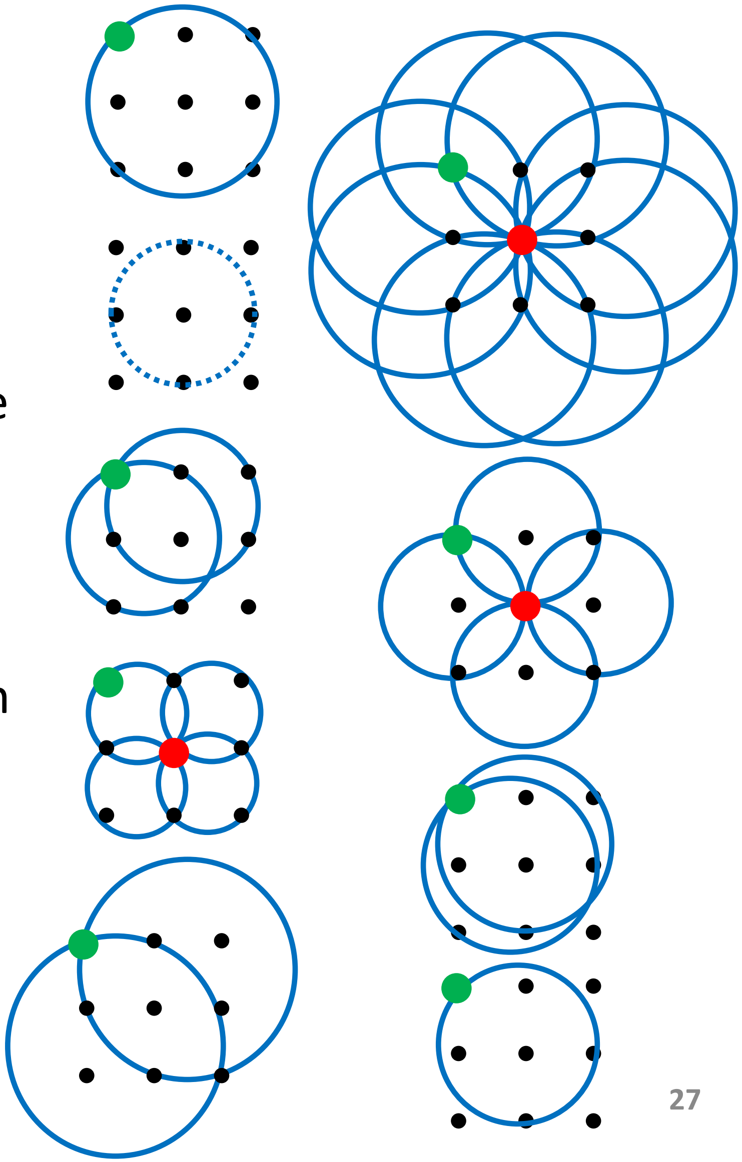
- $Arithmétique : (2N+1)^2 + 163 = (2P)^2,\ 81^2 + 163 = 82^2,$
  $la\ factorisation\ de\ l'anneau\ des\ entiers\ \mathbb{Q}\left(\sqrt{-163}\right)\ est\ unique$

Jour 1 – Problème 18 – Les points et les cercles

- Il y a deux façons d'associer deux cercles passant par 4 points
- Elles laissent ou le centre ou un coin libre

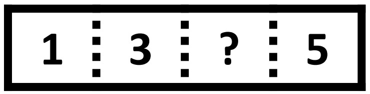
- Le nombre de cercles passant par le centre est 4 + 8 + 4 = **16**
- Le nombre de cercles passant par un coin est 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = **13**

- La réponse est **13** ou **16** cercles

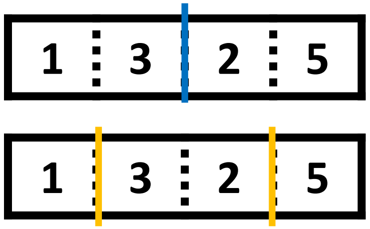


Jour 2 – Problème 1 – Les deux bandes de papier

- Dina ne peut pas obtenir plus de 100
- Ugo coupe au milieu et obtient 13 + ?5



- Le résultat d'Ugo se termine par 8
- Dina coupe tout à droite (sinon 1 + 3 + 5 = 9)
- Elle ne coupe pas au milieu, sinon ? = 0
  et 05 n'est pas un nombre

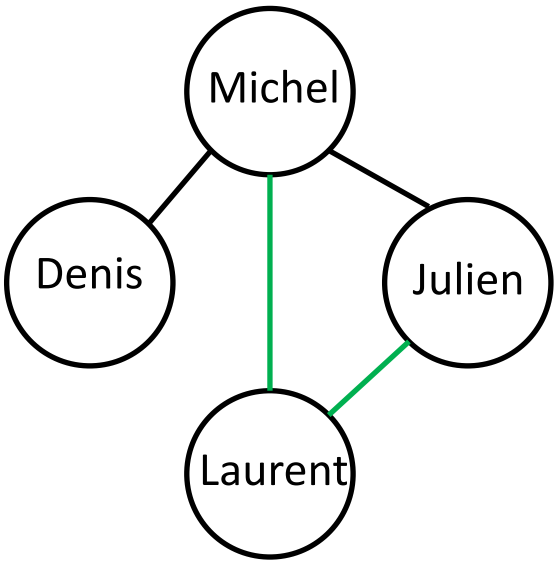


- La réponse est 8 – 1 – 5 = **2**

- *On vérifie que 13 + 25 = 38 = 1 + 32 +5*

Jour 2 – Problème 2 – Le tournoi

- Michel a joué avec les trois autres, dont Denis
- Julien, qui n'a pas joué avec Denis, a joué avec Michel et Laurent
- Laurent a joué avec Michel et Julien
- La réponse est **2**



Jour 2 – Problème 3 – La grille double

- On place le A sur les 2ème puis 3ème ligne
- On place le C dans la 2ème colonne
  puis le B sur la 1ère ligne
- On place le C sur la 2ème ligne
- On termine la 3ème ligne

A 1	2	
	B	A
	A	

A 1	C 2	B
C	B	A
B	A	C

FFJM - 31e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 3 – La grille double

- On place le 3 sur la 1ère ligne
- A est déjà avec 1 dans une case et ne peut pas être avec 3 dans la 3ème colonne
- On termine la grille
- *On observe que la règle donnée pour A est aussi vérifiée par B et par C*

A 1	C 2	B 3
C	B	A 2
B	A 3	C

A 1	C 2	B 3
C 3	B 1	A 2
B 2	A 3	C 1

Jour 2 – Problème 4 – Le train

- Numérotons 1, 2 et 3 les voitures à partir d'une extrémité du train
- Un passager de la voiture 1 a 5 voisins,
  sinon un passager de la voiture 2 en aurait plus de 10
- Un passager de la voiture 2 a 5 voisins dans les voitures 1 et 2,
  plus 5 dans la voiture 3

- Un passager dans la voiture au milieu du train a 10 voisins, il est seul

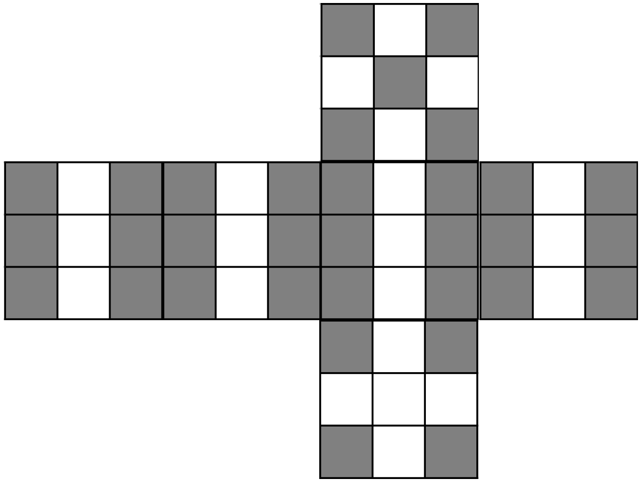
- La réponse est 6 + 5 + 1 + 5 + 6 = **23** passagers

- *On peut vérifier en terminant à partir du milieu*

Passagers	1	5	5	1	5	5	1
Voisins	5	10	10	10	10	10	5

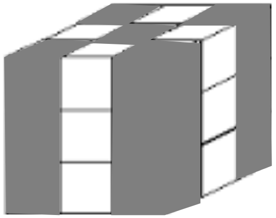
Jour 2 – Problème 5 – Le cube

- La face avec 6 cases grises fait le tour du grand cube (arêtes verticales), donnant 4 x 3 = 12 petits cubes gris



- Les faces avec 4 et 5 cases grises sont les deux faces restantes du grand cube
- Elles montrent 1 petit cube gris de plus

- Comme le petit cube au centre du grand cube est blanc, la réponse est 12 + 1 = **13** petits cubes gris



Jour 2 – Problème 6 – Devine somme

- Le produit des deux plus petits est 256 = (2 x 2 x 2) x (2 x 2 x 2 x 2 x 2)
- Le deuxième plus petit est au moins 32 (et le premier au plus 8)

- 1056 = 32 x 33
- 32 est aussi le premier des deux plus grands
- En fait, on ne compte que trois nombres différents

- 8 + 32 + 33 = **73**

Jour 2 – Problème 7 – Le jardin d'enfants

- Si Baya ne travaille pas le jour où Abby ne travaille pas, leurs 3 jours communs sont ceux où Baya travaille avec chacune des 3 autres
- Mais alors Abby ne pourrait pas travailler 3 jours avec Dara

A	A	A	A	
B	B	B		
C	D	E		

- Si Dara travaille 2 jours avec Abby et Baya, elle doit travailler un quatrième jour et (au moins) un jour avec Cary et Effy
- Mais alors Baya ne le pourrait pas

A	A	A	A	B
B	B	D		D
D	D	C E		E C

Jour 2 – Problème 7 – Le jardin d'enfants

- Cary doit travailler (au moins) un jour avec Effy
- Dary doit travailler (au moins) un jour avec Cary et Effy
- Carry travaille un seul jour avec Abby
- La réponse est **3**

A	A	A	A	B
B	B	D	D	C
D				E

A	A	A	A	B
B	B	D	D	C
D	E	C	E	E

Jour 2 – Problème 8 – La suite de l'année

- Après la 9ème étape,
  19 donne à nouveau 37
- Tout se répète selon la période 6
- 2017 = 7 + (6 x 335)
- La réponse est **34**

2017
229
97
37
31
7
28
34
19

Etapes

1			
2			
3	9	15	
4	10	16	
5	11	17	
6	12	18	…
7	13	19	2017
8	14	…	

Jour 2 – Problème 9 – Pauvres souris

- Soient S le nombre de souris attrapées le premier jour
  et N le nombre de jours

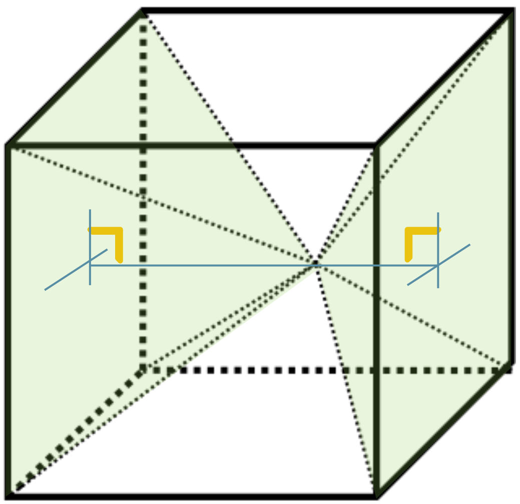
- **Si** N est pair, le nombre total de souris ne peut pas être 55, impair
- **Si** N = 3, S + (S + 2) + (S + 4) = 3 S + 6 ne peut pas être 55, non divisible par 3

- N = 5
- S + (S + 2) + (S + 4) + (S + 6) + (S + 8) = 5 S + 20 = 55 donne S = **7**

- *Si N = 7, S + … + (S + 12) = 5 S + 20 + 10 + 12 = 5 S + 42 ne peut pas être 55*
- *Dès N = 9, le nombre total de souris dépasserait 42 + 14 + 16 = 72*

Jour 2 – Problème 10 – Devine cube

- Les volumes sont proportionnels aux distances du point à la face du cube (base de la pyramide)
- Deux à deux, elles totalisent un côté du cube



- Si 20 et 17 sont additionnées, il ne peut pas y avoir de 3ème valeur (20 + 17 = 37 est impair)
- Soit 20 est doublé et 17 est complétée avec 23
- Soit 17 est doublé et 20 est complétée avec 14

- La réponse est 3 x 40 = **120** ou 3 x 34 = **102** cm^3

Jour 2 – Problème 11 – La piscine

- Hier, soit D la distance totale en km
- (D/2)/2 + (D/2)/3 = 1 donne D = 12/5 km

- Aujourd'hui, Ariel parcourt 2/2 + 3/2 = 5/2 km

- 5/2 – 12/5 = 1/10 km = 100 m = 2 x 50 m

- La réponse est **2**

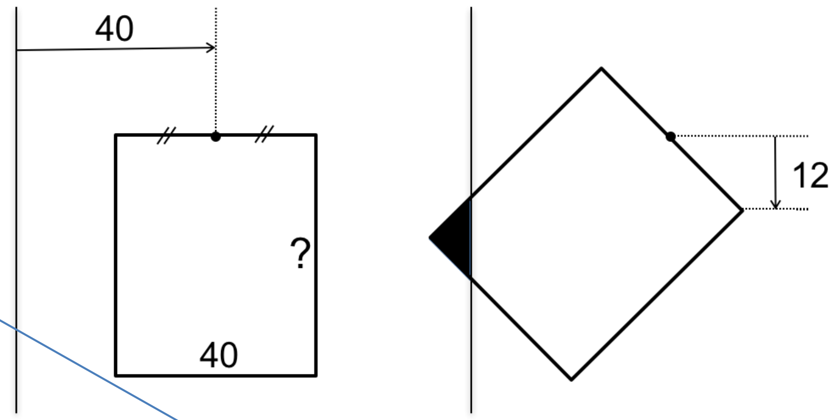
Jour 2 – Problème 12 – Le mot le plus long

- On compte 3 mots d'une lettre possibles (F, J et M), 4 mots de 2 lettres possibles (FF, FJ, JM et MF), 4 mots de 3 lettres possibles (FFJ, FJM, JMF et MFF), 4 mots de 4 lettres possibles (FFJM, FJMF, JMFF et MFFJ)
- Ces 15 mots totalisent 39 lettres, dont 19 F
- Le mot le plus long a 5 lettres
  et un mot de 4 lettres, dont 2 F, n'est pas formé

- Le mot le plus long doit contenir (10 x 2) – (19 – 2) = 3 F

- La réponse est **FFJMF** ou **FJMFF**

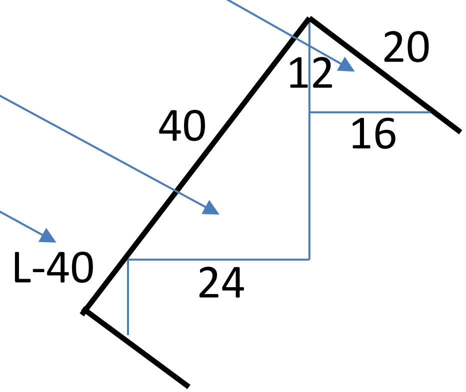
Jour 2 – Problème 13 – Le cadre



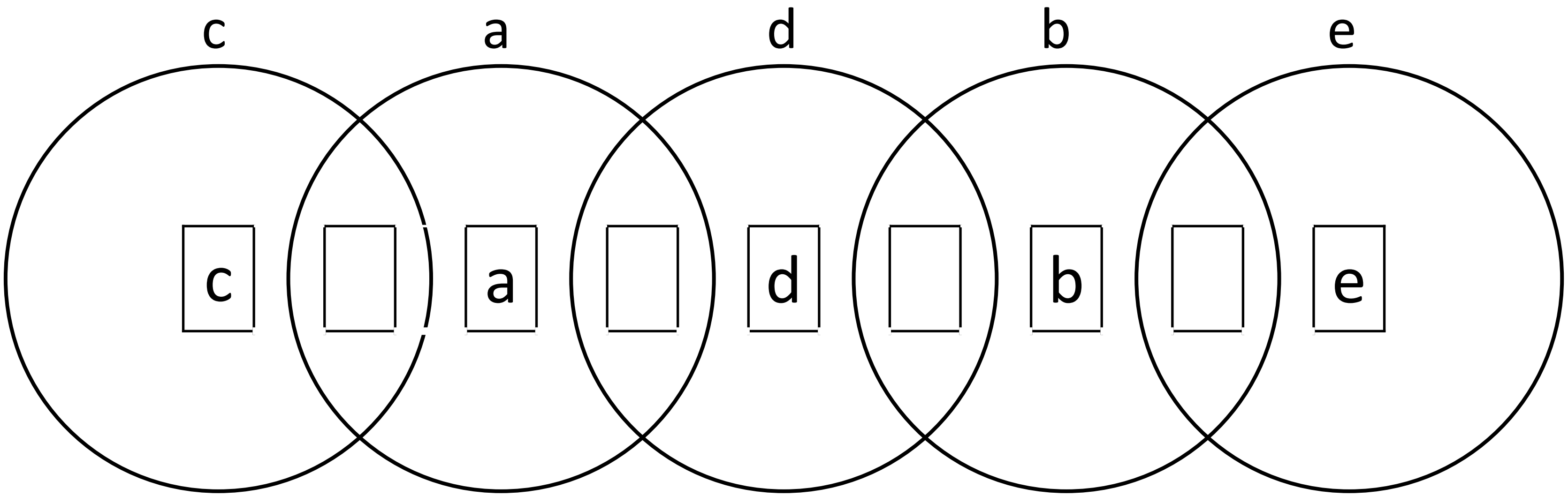
- $20 = 40/2$, $16 = \sqrt{(20^2 - 12^2)}$
- Les triangles rectangles sont proportionnels au 3 4 5 d'aire 6
- $24 = 40$ (rideau-clou) $- 16$
- $40 = (5/3) \times 24$

- $((L - 40)/4))^2 \times 6 = (40L)/80$ (aires)
- $3L^2 - 244L + 4800 = 0$ (discriminant 44^2)
- $(244 + 44) / 6 = 48$ (autre racine trop petite)

- La réponse est **48** cm

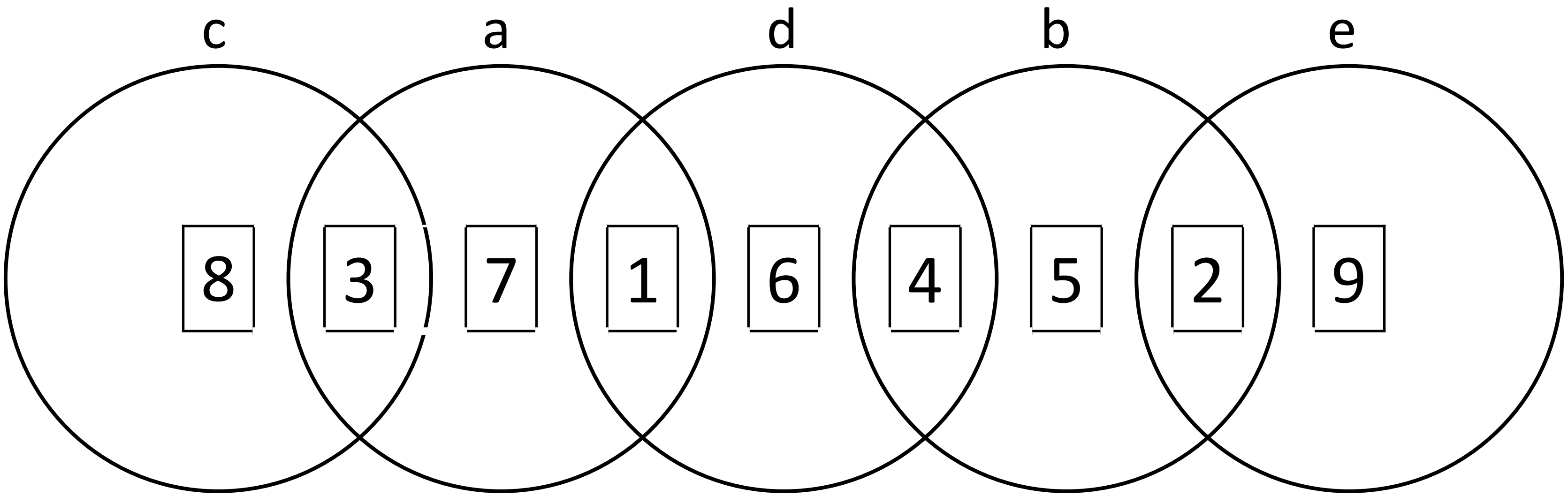


Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



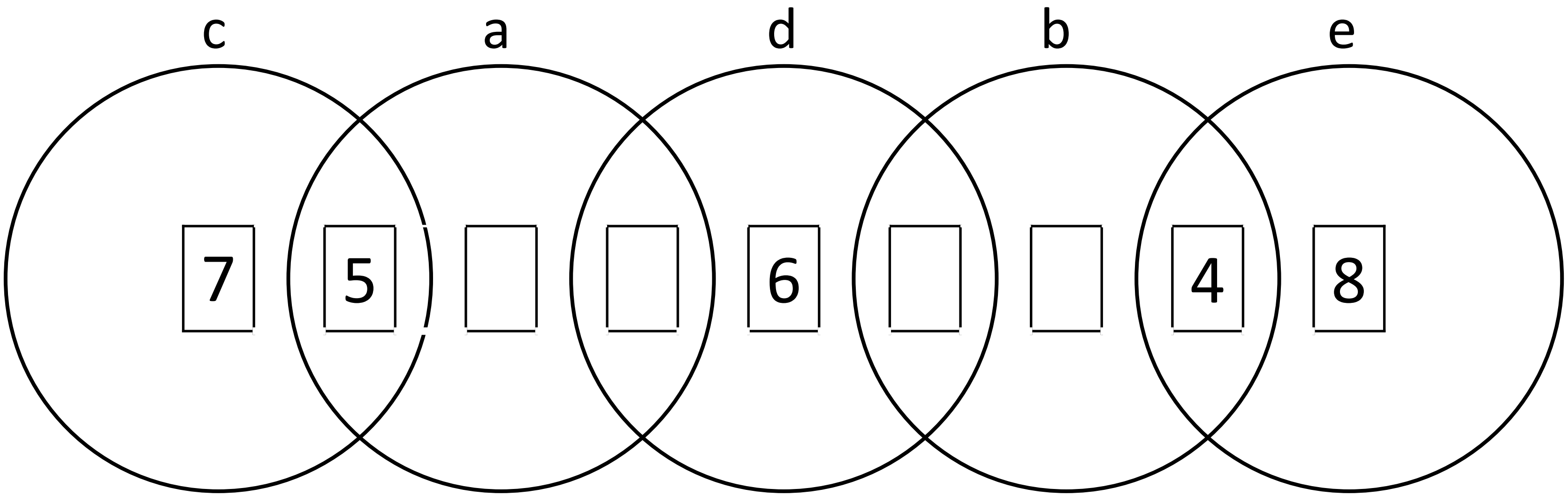
- Soit S la somme constante
- La somme des entiers de 1 à 9 est 45
- $3S + a + b = 45$ donc $S \leq 14$
- $2S + c + d + e = 45$ donc $S \geq 11$

Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



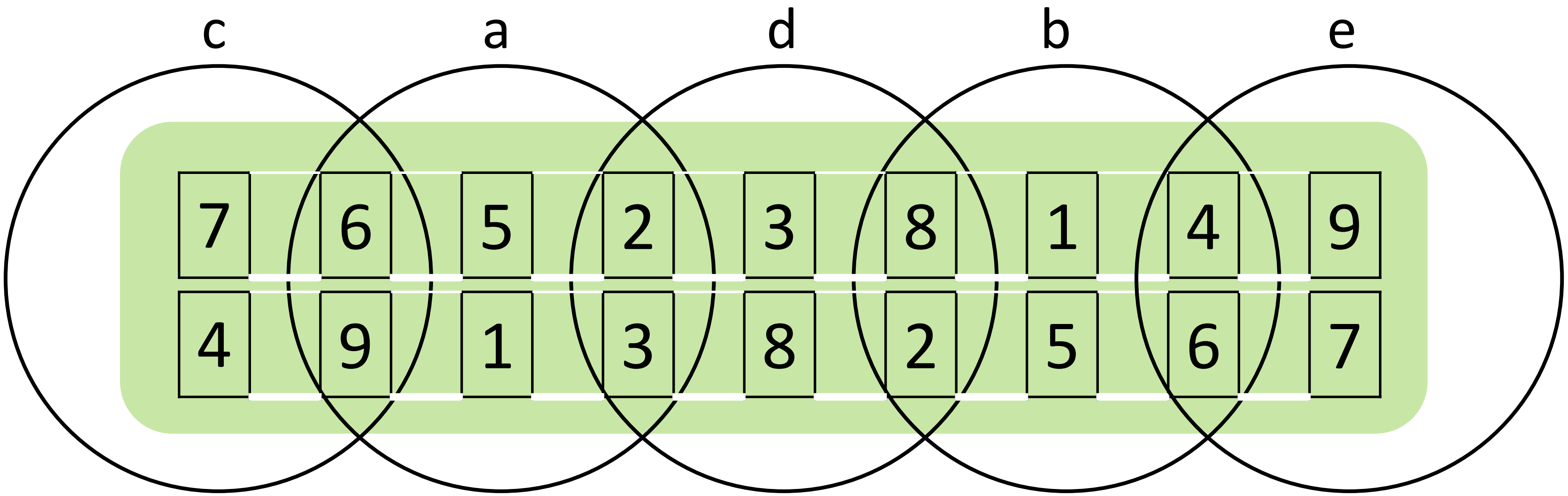
- Si S = 11, c + d + e = 23 donc c, d, e sont 6, 8, 9
- d ≠ 9 car il ne pourrait pas être complété à 11, e = 9 avec 2
- d ≠ 8 car il ne pourrait pas être complété à 11, d= 6 et c = 8 avec 3
- 7 n'est pas avec 2 ni 6, a = 7 et b = 12 – a = 5
- On termine par 1 et 4
- Mais le nombre n'est pas divisible par 13

Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



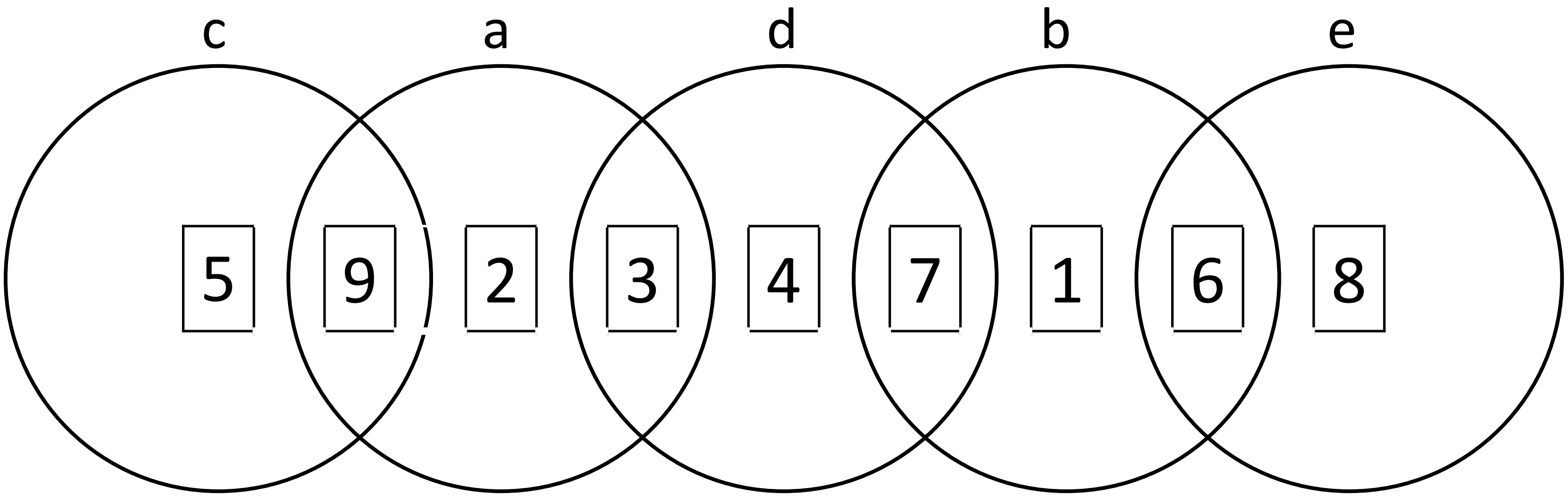
- **Si** S = 12, c + d + e = 21 donc c, d, e sont 4, 8, 9 ou 5, 7, 9 ou 6, 7, 8
- Le 1er cas est écarté car ni 4 ni 8 ne peuvent être à une extrémité
- Le 2ème cas est écarté car ni 5 ni 7 ne peuvent être à une extrémité
- d = 6 qui ne peut pas être à une extrémité, c = 7 avec 5 et e = 8 avec 4
- 9 ne peut pas être placé

Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



- Si S = 13, c + d + e = 19 et a + b = 6 donc a, b sont 1, 5 ou 2, 4
- Si c, d, e est 2, 8, 9, ni 2 ni 8 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 3, 7, 9, d = 3, a ≠ 1 … on obtient une **première réponse**
- Si c, d, e est 4, 6, 9, ni 4 ni 9 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 4, 7, 8, d = 8 … on obtient la **seconde réponse**
- Si c, d, e est 5, 6, 8, ni 5 ni 8 ne peuvent être à une extrémité

Jour 2 – Problème 14 – Les nombres encerclés



- **Si** S = 14, c + d + e = 17 et a + b = 3 donc a, b sont 1, 2
- Si c, d, e est 3, 5, 9, ni 5 ni 9 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 3, 6, 8, ni 6 ni 8 ne peuvent être à une extrémité
- Si c, d, e est 4, 5, 8, d = 4, a ≠ 1 … mais le nombre n'est pas divisible par 13
- Si c, d, e est 4, 6, 7, ni 4 ni 7 ne peuvent être à une extrémité

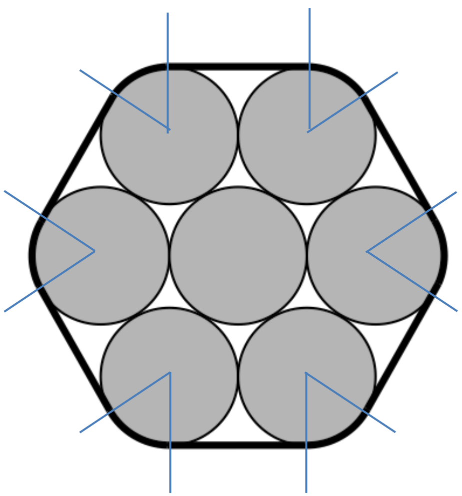
Jour 2 – Problème 15 – Les tuyaux

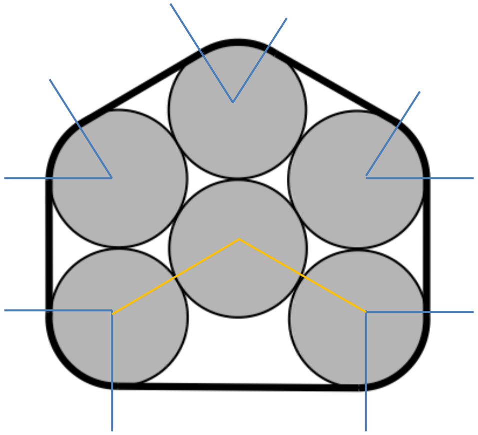
- Soient R le rayon d'un tuyau en mm
  et d la diminution cherchée

- $12R + 2\pi R = 914$
- $8R + (2\sqrt{3})R + 2\pi R = 914 - d$
- $d = (2 - \sqrt{3}) \times 914 / (6 + \pi) \cong 0{,}27 \times 100 = 27$

- La réponse est **27** mm

- *Le tour de ruban ne baisse que d'environ 3 %*





Jour 2 – Problème 16 – En fractions unitaires

- On cherche a < b tel que (1 / a) + (1 / b) = (4 / 2017) – (1 / 7120010)
- 2 x 5 x 353 (a + b) = 7 a b **[1]**

- Si a et b sont divisibles par 353, a = 353 a’ et b = 353 b’ (avec a’ < b’)
- **[1]** devient 2 x 5 (a’ + b’) = 7 a’ b’
- 2 – a’ = 4(b’ – 5)/(25 + 7(b’ – 5)) vaut -3, -8/11, -2/9, 0 puis tend vers 4/7
- b’ = 5 et a’ = 2, d’où une première réponse 353 x 2 = **706**

- *4/2017 - 1/7120010 = 14119/7120010 = 7/(2x5x353) = (5+2)/(2x5x353) = 1/(2x353) + 1/(5x353) = 1/706 + 1/1765*

Jour 2 – Problème 16 – En fractions unitaires

- Si seul a est divisible par 353, a = 353a’
- [1] devient 2 x 5 (353a’ + b) = 7 a’ b qui donne a’ = 304 + 353a’’
- 2 x 5 (304 + 353a’’) = (7a’’ + 6)b
- D’où une contradiction car b ≥ 2^2x5x353/7 > 1008

- Si seul b est divisible par 353, [1] devient (7b’’ + 6)a = 10(304 + 353b’’)
- 505 – a = 5(b’’ - 2)/(20 + 7(b’’ - 2)) vaut -5/3, -5/13, 0 puis tend vers 5/7
- b’’ = 2 et a = 505, d’où la seconde réponse **505**

- *4/2017 - 1/7120010 = 14119/7120010 = 7/(2x5x353) = 707/(2x5x101x353) = (706+1)/(2x5x101x353) = 1/(5x101) + 1/(2x5x101x353) = 1/505 + 1/356530*

Jour 2 – Problème 17 – Les hauteurs du triangle

- Soient a et b les côtés du triangle correspondant aux hauteurs 20 et 17, c le troisième côté, h la troisième hauteur
- L'aire du triangle est la moitié de $20a = 17b = ch$

- Les inégalités triangulaires donnent $b - a \leq c \leq a + b$
- $(20 - 17)ch \leq (17 \times 20)c \leq (17 + 20)ch$
- $9{,}18 \leq h \leq 113{,}34$

- La réponse est 113 - 9 = **104**

Jour 2 – Problème 18 – De la suite dans les idées

- Soient M le nombre du Mage Hic, S et P les nombres de Serge et de Pierre
- $123456789 = P^2 M (M + S^2)$ **[1]**
- Si $P \geq 12$, alors $M^2 < 10^6$, d'où une contradiction (M a 4 chiffres)
- **P = 3** (test des diviseurs premiers jusqu'à 11) ou **P = 1**

- Si **P = 3**, M est impair et S = 2 + 4s
- **[1]** devient $M^2 + (4 \times (1 + 2s)^2) M - 13717421 = 0$
- On étudie le quart du discriminant, soit $(4 \times (1 + 2s)^4) + 13717421$
- Si s = 0 (S = 2), 1 (S = 6) et 2 (S = 10), alors 13717425, 13717745 et 13719921 ne sont pas des carrés
- Si s = 3 (S = 14), $13727025 = 3705^2$, $M = -(2 \times 7^2) + 3705 =$ **3607**

Jour 2 – Problème 18 – De la suite dans les idées

- Toujours si **P = 3**, 3607 + 14^2 = 3803
- [1] devient M { M + (4 x (1 + 2s)2 } = 3607 x 3803
- M $\neq$ 1 car (13717421 – 1) / 4 = 9670645 n'est pas un carré
- 3607 et 3803 sont premiers (test des diviseurs premiers jusqu'à 61)
- Il n'y a pas d'autre réponse

- Si **P = 1**, [1] devient M (M + S^2) = 3^2 x 3607 x 3803
- Mais pour M = 1, 3, 3^2 = 9, 3607, 3803 ou 3x3607 (les 6 cas à étudier), S^2 se terminerait respectivement par 8, 60, 2, 20, 60 et 8

- La **réponse** est **unique**