Finale suisse – 20 mai 2017

1. Classement

Nous savons que 51 concurrents participent à un championnat.
Matt est accompagné de 50 autres personnes car 51 – 1 = 50.

Si 13 personnes sont classées devant Matt, nous pouvons en déduire combien sont placées derrière lui.

Il y en aura 50 – 13 = **37** personnes.

2. Du neuf avec du vieux

Le nombre obtenu à partir d'une année donnée va devenir de plus en plus grand jusqu'en 2019 où il vaudra 2 + 0 + 1 + 9 = 12.

En 2020, il vaudra 2 + 0 + 2 + 0 = 4.
Il deviendra à nouveau de plus en plus grand jusqu'en 2029.

Quelques petits calculs nous permettent de trouver la date qui nous intéresse:
2025 car 2 + 0 + 2 + 5 = 9.

Il s'agit de répondre correctement à la question. Nous sommes en 2017, et, nous nous demandons combien d'années il faudra attendre avant l'an 2025.

La réponse est **8** ans.

3. Initiale

Nous savons que le candidat dont on parle possède les initiales suivantes :
Nom : F
Prénom : S

Observons l'alphabet pour trouver les initiales de son voisin en suivant la consigne :

Initiale connue (F) — 4 rangs après (J)

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

6 rangs avant (M) — Initiale connue (S)

Cela nous permet de conclure que les initiales de son voisin sont les suivantes :
Nom : **J**
Prénom : **M**

4. Dix-sept… Ou pas

Ce problème nécessite de la patience et de la rigueur. Néanmoins, il ne recèle pas d'écueils à éviter.

Plaçons les chiffres 3 par 3 dans un tableau (de bas en haut, puis de gauche à droite) en y accolant leur somme :

Chiffres	Somme	Chiffres	Somme	Chiffres	Somme
5 8 4	17	5 3 8	*16*	7 8 1	*16*
8 4 3	*15*	3 8 1	*12*	8 1 6	*15*
4 3 9	*16*	8 1 2	*11*	1 6 7	*14*
3 9 5	17	1 2 7	*10*	6 7 4	17
9 5 3	17	2 7 8	17	7 4 9	*20*

Dans ce tableau, nous retrouvons en italique, les **10** sommes ne valant pas 17.

5. Le grand-père perd

Le grand-père réalise un 8, un 0 et un autre score compris entre 1 et 7.
Sacha et Baptiste réalisent trois scores compris entre 1 et 7. Leur score cumulé est identique car ils gagnent avec le même nombre de points.
Tous les résultats entre 1 et 8 ont été atteints une et une seule fois.

Cette dernière affirmation nous permet de savoir que le score cumulé des trois personnes s'élève à 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.

Le tableau ci-dessous nous permettra de conclure :

	Score obtenu par le grand-père avec sa dernière fléchette						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Grand-père	9	10	11	12	13	14	15
Sacha	13,5	13	12,5	12	11,5	11	10,5
Baptiste	13,5	13	12,5	12	11,5	11	10,5

Le grand-père a obtenu 2 points avec sa dernière fléchette car les scores doivent être des nombres entiers et celui de Sacha et Baptiste doit être supérieur à celui du grand-père.
Précisons pour la forme que Sacha et Baptiste ont obtenu les scores suivants :
1 + 5 + 7 et 3 + 4 + 6.

Cela nous permet de répondre à la question en affirmant que Sacha et Baptiste ont obtenu **13** points chacun.

6. Bonus

2017 peut s'écrire ainsi 2017 = 500 + 200 + 200 + 200 + 200 + 200 + 200 + 200 + 117.
Chacun de ces termes permet de recevoir un cadeau bonus, à l'exception du dernier : 117.

Mickey A. a reçu **8** cadeaux bonus.

7. Dialogue

La deuxième réplique nous permet de savoir que Matthieu a 41 ans en 2017.
Nous pouvons en déduire qu'il est né en 2017 – 41 = 1976.

Mathias lui demande en quelle année, il avait son âge, c'est-à-dire 8 ans.

Matthieu répondra que cela s'est produit en 1976 + 8 = **1984**.

8. Je vous ai apporté des bonbons

Nous pouvons résoudre ce problème à l'aide d'une équation. Etant donné qu'il est proposé à des élèves de 6H, nous procéderons d'une autre manière.

Penchons-nous sur le cas de Tim pour commencer.
Il prend la moitié du tas qu'il voit devant lui, plus 50 bonbons et il ne reste plus de bonbons.
Remontons le temps.
Il en a laissé 0.
Avant qu'il ne prenne les 50 bonbons, il y en avait 50 (50 – 50 = 0).
Avant qu'il ne prenne la moitié du tas, il y en avait 100 (la moitié de 100 vaut 50).

Penchons-nous, maintenant, sur le cas de Vic qui a pris la moitié du tas initial, plus 50 bonbons et qui en a laissé 100.
Remontons le temps.
Il en laissé 100.
Avant qu'ils ne prennent les 50 bonbons, il y en avait 150 (50 + 100 = 150).
Avant qu'il ne prenne la moitié du tas, il y en avait 300 (la moitié de 300 vaut 150).

Il est simple de vérifier que cette réponse est la bonne en suivant l'histoire dans le bon sens.

Nous pouvons affirmer qu'au départ, il y avait **300** bonbons.

9. Téléphone

La donnée nous permet de savoir que le jour de naissance de l'arrière-grand-mère de Mathilde est le 11, le 12 ou le 31. Son mois de naissance est le 11 (novembre) ou le 12 (décembre). Notons que 31 ne peut représenter le mois de naissance. Finalement, nous comprenons que son année de naissance est 11 (1911), 12 (1912) ou 31 (1931).

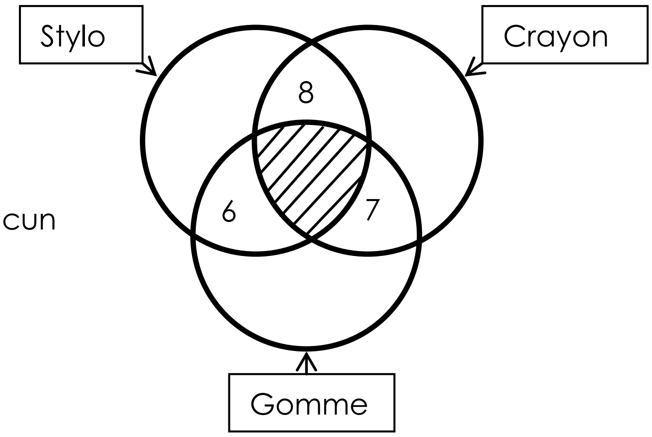
Tous ces nombres doivent être utilisés. Le tableau ci-dessous résume les cas possibles.

Jour	Mois	Année	Remarque
11	12	31	Date possible
12	11	31	Date possible
31	11	12	Le 30 novembre n'existe pas
31	12	11	Date possible

Il existe **3 solutions** : le **11.12.31**, le **12.11.31** et le **31.12.11**

10. Début d'année scolaire

Commençons par réaliser un diagramme rendant compte de la situation.



Nous avons placé les 8 + 7 + 6 = 21 élèves qui ont acheté deux articles différents.

Nous avons hachuré la zone centrale car aucun élève n'a acheté trois articles différents.

Pour l'instant, le nombre de stylos vendus s'élève à 14, celui de crayons vendus est de 15 et celui de gomme vaut 13.

Il reste 23 – 21 = 2 élèves.
La donnée affirme que tous les élèves ont acheté au moins article, nous devons les placer dans ce diagramme.
La donnée ne nous interdit pas de penser qu'un élève a pu acheter 7 gommes, ou 10 crayons. Cela nous mènerait à une infinité de solutions. Nous allons admettre que les 2 derniers élèves ont acheté un seul article chacun.

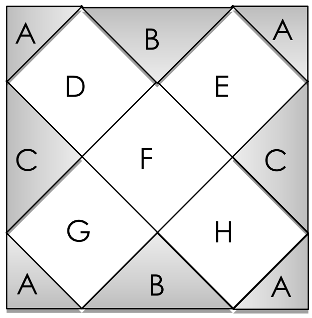
Pour que le nombre de stylos vendus et le nombre de gommes vendues soient identiques, il faut qu'un élève achète un stylo.

Le dernier élève restant a acheté une gomme.

Le nombre de gommes vendues est de 6 + 7 + 1 = **14**.

11. Carré noir

Nous allons travailler avec le dessin ci-contre.



Les rectangles blancs ont des bords parallèles aux diagonales du carré. Cela nous permet d'affirmer que nous trouvons, sur ce dessin, uniquement des angles de 45° ou de 90°.

Les rectangles blancs sont 3 fois plus longs que larges. Nous pouvons en déduire que D, E, F, G et H sont 5 petits carrés identiques.

En assemblant les 2 surfaces nommées C, nous créons un sixième petit carré identique.
En assemblant les 2 surfaces nommées B, nous créons un septième petit carré identique.
En assemblant les 4 surfaces nommées A, nous créons un huitième petit carré identique.

La partie visible en noir est représentée par 3 petits carrés et vaut 18 cm^2, tandis que la partie initiale ombrée est représentée par 8 petits carrés identiques.

Un dernier calcul nous permet de conclure.
L'aire du carré initiale est de 18 : 3 · 8 = **48** cm^2.

12. Carré blanc

Observons un exemple avec un rectangle contenant 20 petits carrés au lieu de 1998, et un alphabet contenant 2 lettres au lieu de 26.

		A	B				A
							B
B							
A				B	A		

Nous constatons qu'il y a une répétition des 2 lettres de notre alphabet et de 3 carrés vides. Ce motif se répète 4 fois.
Cela est possible car $(2 + 3) \cdot 4 = 20$.

Dans le cas proposé, nous devons satisfaire à la contrainte suivante :
$(26 + x) \cdot y = 1998$, avec x le nombre de carrés vides entre chaque alphabet et y le nombre de répétitions du motif.

y doit être un diviseur de 1998. Voici les options possibles :

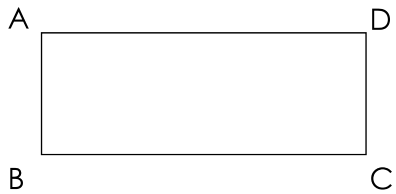
$1998 = 1 \cdot 1998$	$1998 = 2 \cdot 999$	$1998 = 3 \cdot 666$	$1998 = 6 \cdot 333$
$1998 = 9 \cdot 222$	$1998 = \mathit{18} \cdot 111$	$1998 = \mathit{27} \cdot \mathit{74}$	$1998 = \mathit{37} \cdot \mathit{54}$

Il y a plus de 10 fois l'alphabet qui est écrit donc y doit être supérieur à 10. Simultanément, 1998 divisé par notre candidat doit être au moins égal à 27 (un alphabet complet et un petit carré vide). Seuls les 5 nombres en italique subsistent.

Si le motif est répété 18 fois, il contiendra 111 petits carrés. Sur ces 111 petits carrés, 26 contiennent des lettres et 85 sont vides.

En répétant ce raisonnement, nous trouvons **5 solutions** possibles.
Il peut y avoir **85, 48, 28, 11 ou 1** carrés blancs entre chaque énumération de l'alphabet,

13. 3P



Plaçons le pommier sur le sommet A d'un rectangle. A partir de là, il existe trois cas possibles. Les autres possibilités ne constitueraient que des symétries des cas présentés.

Le poirier et le prunier peuvent être placés en B et D. Nous obtenons un rectangle de 24 m sur 25 m.

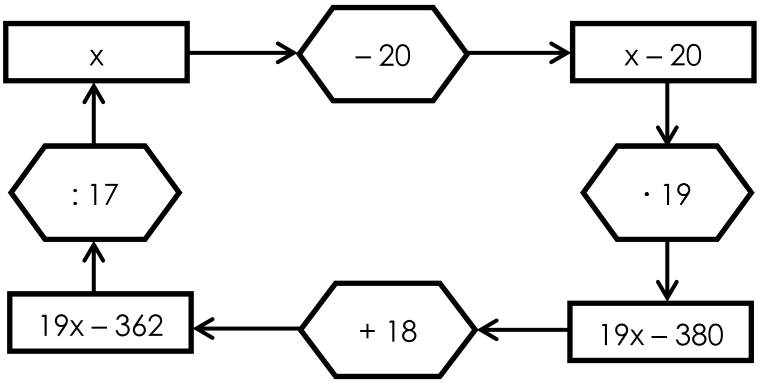
Le poirier peut être placé en C et le prunier en D. La diagonale mesure 24 m et un des côtés du rectangle mesure 25 m. Cela n'est pas possible !

Le prunier peut être placé en C et le poirier en D. AD mesure 24 m, AC mesure 25 m et le triangle ACD est rectangle. Nous obtenons un rectangle de 24 m sur 7 m ($7^2 + 24^2 = 25^2$).

Nous pouvons conclure qu'il existe **2 solutions**. L'aire du verger est de **600** m^2 **ou** de **168** m^2.

14. De 17 à 20

Remplaçons le ? par un x et observons les trois premières étapes.



La colonne de gauche nous permet d'obtenir l'équation suivante : $19x - 362 = 17x$.

En la résolvant, nous trouvons l'unique solution : **181**.

15. Tondeuse

Mathias tond la pelouse en 60 min. Nous en déduisons qu'en une minute, il tond $\frac{1}{60}$ de la pelouse.
Matthieu tond la pelouse en 90 min. Nous en déduisons qu'en une minute, il tond $\frac{1}{90}$ de la pelouse.
Cela nous permet d'affirmer qu'en une minute, ils tondent ensemble $\frac{5}{180}$ de la pelouse.
Il est aisé de vérifier qu'il leur faudra **36** minutes pour parvenir à $\frac{180}{180}$, soit une pelouse complète.

16. La somme des parties

Soit un nombre à 4 chiffres abcd, plus grand que 2017.
Nous voulons que $(10a + b) + (10c + d) = 10b + c$.
Cela revient à dire que $9(b - c) = 10a + d$.
Si on fixe a, d doit être choisi afin que $10a + d$ soit un multiple de 9.
Il est également nécessaire que $b - c$ ne soit pas plus grand que 9 ($9 - 0$ étant le cas extrême que nous puissions obtenir).

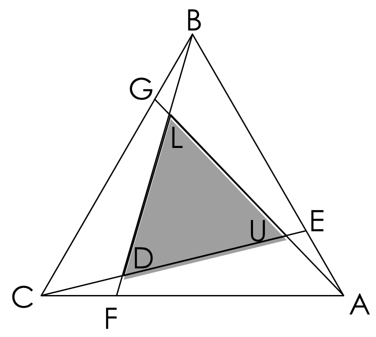
Le tableau suivant résume les cas possibles :

a	d	(b; c)
2	7	(9; 6), (8; 5), (7; 4), (6; 3), (5; 2), (4; 1), (3; 0)
3	6	(9; 5), (8; 4), (7; 3), (6; 2), (5; 1), (4; 0)
4	5	(9; 4), (8; 3), (7; 2), (6; 1), (5; 0)
5	4	(9; 3), (8; 2), (7; 1), (6; 0)
6	3	(9; 2), (8; 1), (7; 0)
7	2	(9; 1), (8; 0)
8	1	(7; 0)

Nous dénombrons, donc, **28 solutions** : **2307, 2417, 2527, 2637, 2747, 2857, 2967, 3406, 3516, 3626, 3736, 3846, 3956, 4505, 4615, 4725, 4835, 4945, 5604, 5714, 5824, 5934, 6703, 6813, 6923, 7802, 7912, 8701**.

Ndlr : Une erreur de copie du brouillon au bulletin-réponse peut coûter le sans faute, beaucoup de place et la qualification. Rien de dramatique, mais la catharsis écrite était nécessaire…

17. Grand air



A défaut de solution élégante, sortons l'artillerie lourde, à savoir, la géométrie analytique.

Munissons-nous d'un repère orthonormé $(C; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ où $\vec{e_1} = \overrightarrow{CA}$

A l'aide de Pythagore et Thalès, nous trouvons les coordonnées des points suivants :
$C(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $F(\frac{1}{4}; 0)$, $E(\frac{7}{8}; \frac{\sqrt{3}}{8})$ et $G(\frac{3}{8}; \frac{3\sqrt{3}}{8})$

Nous en déduisons l'équation des droites (après avoir trouvé les pentes et les ordonnées à l'origine) :

CE : $y = \frac{\sqrt{3}}{7}x$ BF : $y = 2\sqrt{3}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ AG : $y = -\frac{3\sqrt{3}}{5}x + \frac{3\sqrt{3}}{5}$

D et U constituent les intersections de CE avec BF et AG.

Les deux systèmes d'équations nous permettent de trouver $D(\frac{7}{26}; \frac{\sqrt{3}}{26})$ et $U(\frac{21}{26}; \frac{3\sqrt{3}}{26})$.

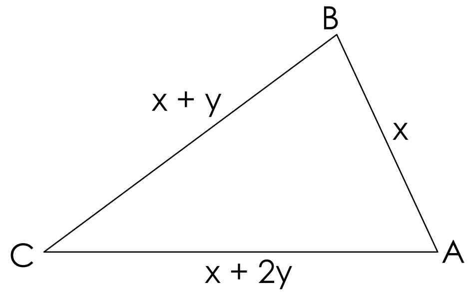
Il est, alors, aisé de trouver la distance séparant D de U : $\frac{\sqrt{52}}{13}$.

Cette distance constitue également le rapport de similitude entre le triangle BAC et le triangle LUD. En l'élevant au carré, nous trouverons le rapport entre l'aire de ces deux triangles. Ce rapport est de $\frac{52}{169}$.

En sachant que le triangle BAC a une aire de 1001 m², on trouve aisément l'aire du triangle LUD qui vaut **308** m².

18. Le champ du père Itoine

Commençons par placer quelques filtres sur cette donnée en observant le triangle ci-contre, où x est la longueur du petit côté et y représente la raison arithmétique.



Nous savons que le plus grand côté doit être inférieur à 30 hm, que la raison arithmétique doit être la plus grande possible et que l'inégalité triangulaire doit être respectée.

Cas 1 : Raison arithmétique = 9 hm

Il existe 2 triangles possibles : 10 – 19 – 28 et 11 – 20 – 29.

Chaque triangle possède trois angles. Nous devons déterminer 3 cosinus et en trouver un dont la valeur est un nombre entier de dixièmes. Si tel n'est pas le cas, nous tenterons la même expérience avec une raison arithmétique valant 8 hm, etc.

Afin de déterminer la valeur de ces cosinus, nous allons utiliser le théorème du cosinus qui nous apprend que :

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Les cosinus trouvés pour le triangle 10 – 19 – 29 valent : $\frac{-323}{380}$, $\frac{523}{560}$ et $\frac{1045}{1064}$.

Les cosinus trouvés pour le triangle 10 – 19 – 29 valent : $\frac{-320}{440}$, $\frac{562}{368}$ et $\frac{1120}{1160}$.

Nous n'avons pas réussi à déterminer de solutions pour l'instant. Passons à la raison arithmétique inférieure, à savoir 8 hm.

Cas 2 : Raison arithmétique = 8 hm

Il existe 5 triangles possibles : 9 – 17 – 25, 10 – 18 – 26, 11 – 19 – 27, 12 – 20 – 28 et 13 – 21 – 29.

Répétons ce même procédé afin de déterminer les valeurs des cosinus.

Nous trouvons que dans le triangle 10 – 18 – 26, il existe un cosinus valant $\frac{-252}{360} = \frac{-7}{10}$.

Nous trouvons que dans le triangle 12 – 20 – 28, il existe un cosinus valant $\frac{-240}{480} = \frac{-5}{10}$.

Ces deux triangles nous permettent de conclure.

Il existe **2 solutions**. Le périmètre du champ du père Itoine mesure **56** hm ou **60** hm.