32e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

Finale Internationale des 29 et 30 août 2018

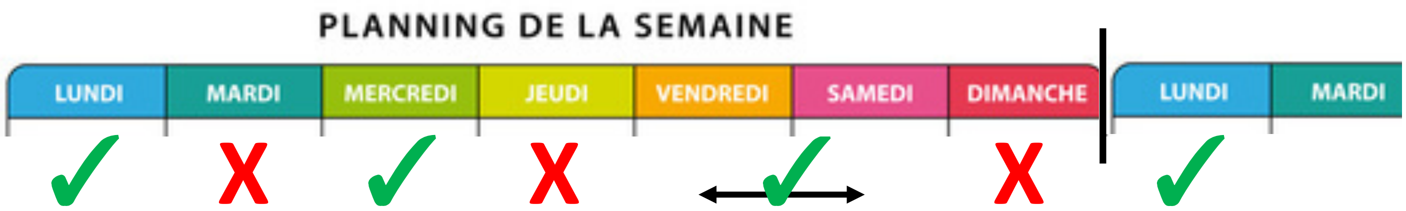
DiapoRAMA des solutions

Jour 1 – Problème 1 – Dans le noir

- Si Lou prend 6 crayons, elle peut n'emporter que les crayons bleus
- Lou doit prendre, au minimum, **7** crayons

Jour 1 – Problème 2 – L'entraînement

- Si Ted travaille le lundi, il ne travaille pas le dimanche ni le mardi
- Il travaille le mercredi, et, ou le vendredi ou le samedi

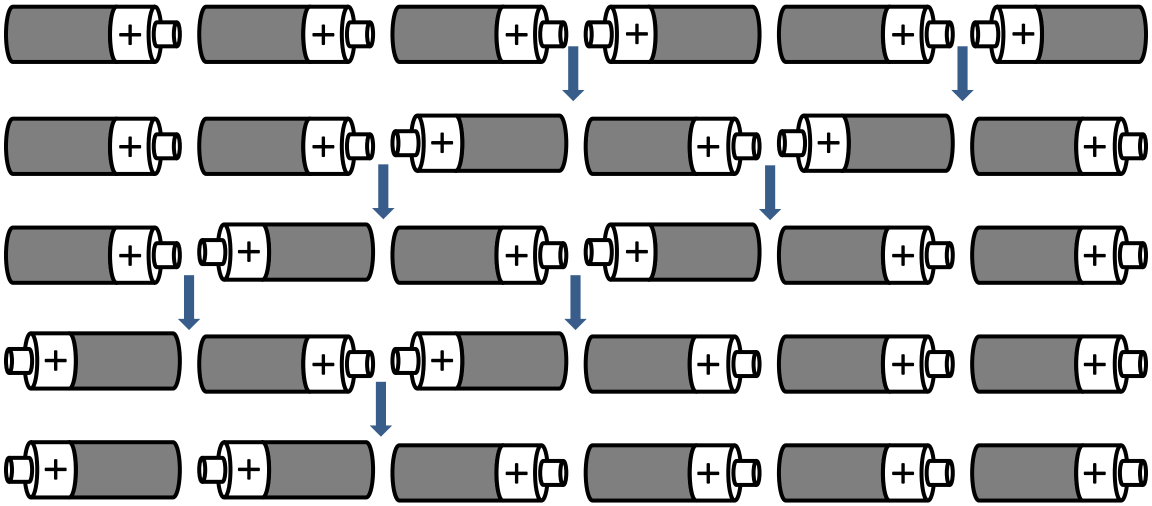


- Si Ted ne travaille pas le lundi, il travaille le vendredi, le dimanche, et, ou le mardi ou le mercredi,

- 2 + 2 = **4** plannings sont possibles

FFJM - 32e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 3 – Les piles



- **7** opérations auront été comptées

Jour 1 – Problème 4 – Plus 3 ou 5

- Nous avons intérêt à grouper en quatre paires des nombres dont la différence est 2, afin d'ajouter 5 au plus petit des deux et 3 au plus grand
- Il restera un nombre seul (ci-dessous, le 9)

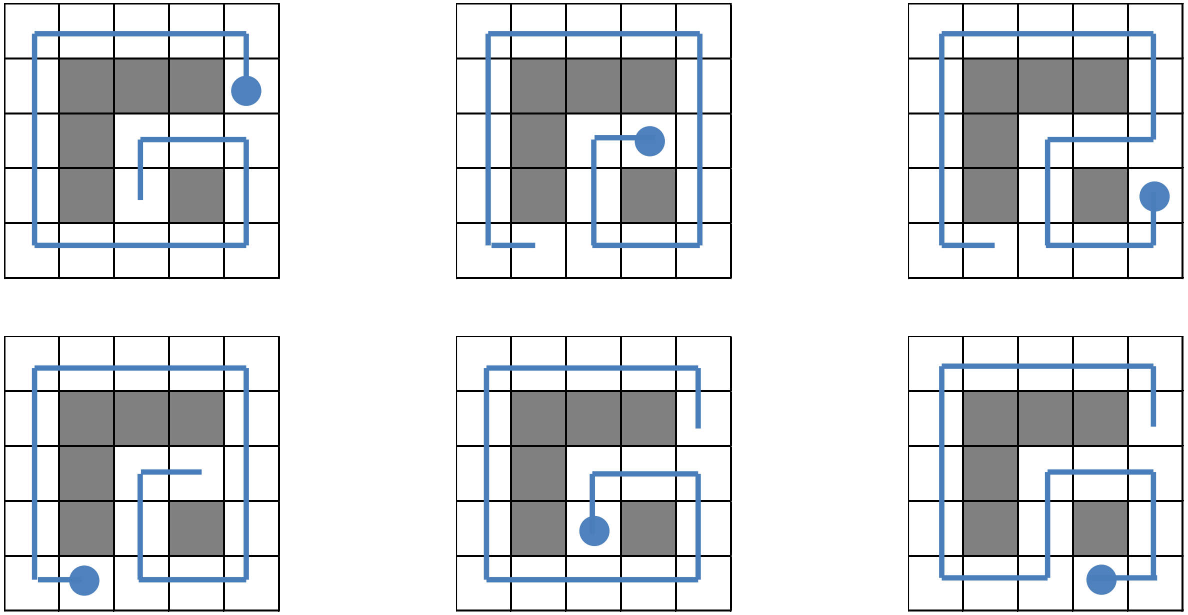
1 2 3 4 5 6 7 8 9

+ 5 + 3

6 7 6 7 10 11 10 11 14

- Le nombre de résultats différents le plus petit possible est **5**

Jour 1 – Problème 5 – Arobase



- Nous pouvons partir de **6** cases blanches

Jour 1 – Problème 6 – Une fois sur trois

- Les phrases B et D ne peuvent pas être vraies toutes les deux et, n'étant pas séparées par deux autres phrases, elles ne peuvent pas être fausses toutes les deux
- **Si** B est fausse, A et F sont vraies, le nombre est 24 ou 42, E est fausse, le nombre n'est pas multiple de 6, d'où une contradiction
- D est fausse, B est vraie, le nombre est plus grand que 57, E est vraie, le nombre est multiple de 6, F est vraie, un des chiffres est 4, Trisha pense au nombre **84**
- *Nous vérifions que A est fausse et que C est vraie*

A « Un des chiffres du nombre est 2 »

B « Le nombre est plus grand que 57 »

C « Le nombre est pair »

D « Le nombre est plus petit que 31 »

E « Le nombre est multiple de 6 »

F « Un des chiffres du nombre est 4 »

Jour 1 – Problème 7 – Les nombres porte bonheur

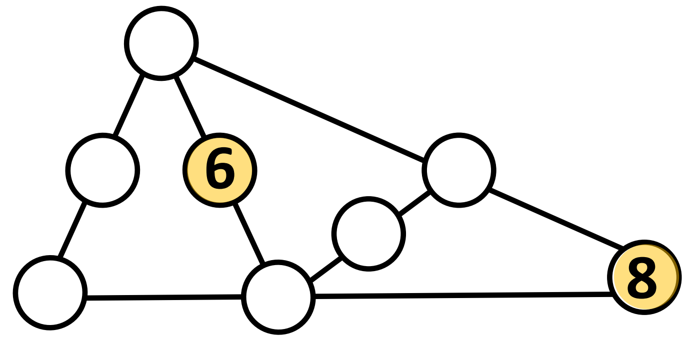
- Soient respectivement $13\ Q_1$ et $13\ Q_2$
  les sommes des chiffres du premier et du second entier
- Un nombre dont la somme des chiffres est au moins égale à $13 \times 4 = 52 = 5 \times 9 + 7$ étant supérieur à 55555, Q_1 et Q_2 sont au plus égales à 3
- $(13\ Q_1 + 1) - 13\ Q_2 = 13\ (Q_1 - Q_2) + 1$ est divisible par 9
- $Q_1 = 3$ et $Q_2 = 1$

- Le plus petit nombre dont la somme des chiffres est $13 \times 3 = 39$ est 39999
- 39999, 48999, 49899, 49989 et 49998 sont suivis respectivement par 40000, 49000, 49900, 49990 et 49999
- Seul 49000 a pour somme des chiffres $13 \times 1 = 13$
- Le plus grand des deux nombres est **49000**

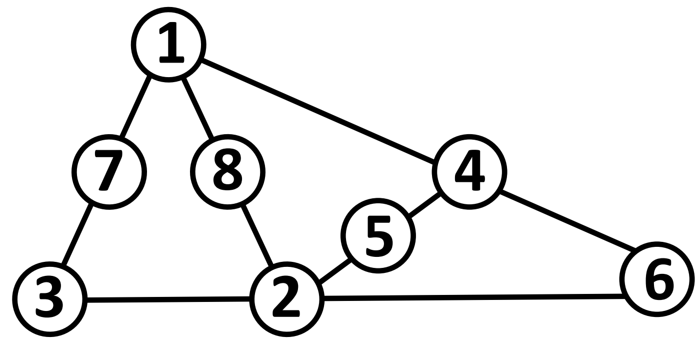
FFJM - 32e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 8 – Sommes toutes

- La somme des nombres de 1 à 8 est 36
- La somme des deux nombres oranges est 36 – (2 x 11) = 14, ce sont 6 et 8

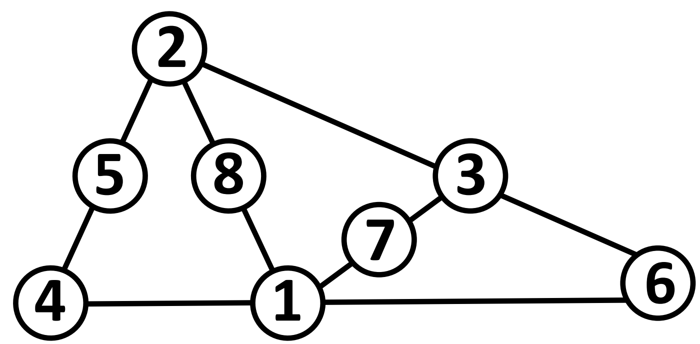


- Si 8 est écrit dans le disque en bas à droite, chacun des deux alignements auxquels il appartient devrait contenir 1 et 2 pour obtenir la somme 11



- Il faut écrire **6** en bas à droite

- *Le dessin illustre les deux configurations possibles (non demandées)*



Jour 1 – Problème 9 – Les tramways

- Le tramway parti 25 minutes avant le taxi atteindra le centre de la ville dans 43 – 25 = 18 minutes, donc avant le taxi (18 < 21)

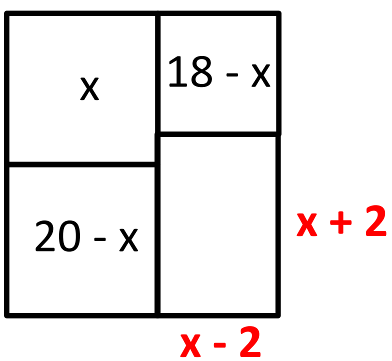
- Les tramways partis 20, 15, 10 et 5 minutes avant le taxi atteindront respectivement le centre de la ville dans 23, 28, 33 et 38 minutes, donc après le taxi (21 < 23)

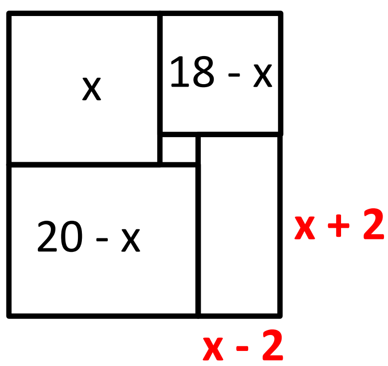
- Le taxi a dépassé **4** tramways

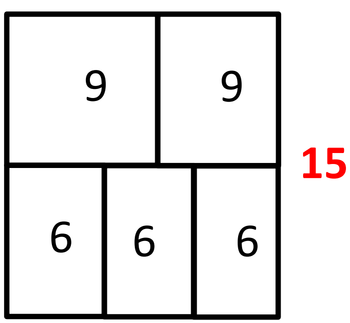
- *Remarque : en considérant que la vitesse des tramways n'est pas constante, il devient possible que le taxi dépasse jusqu'à 12 tramways (ce jeu de 9 réponses - 4 à 12 - a été accepté par le jury).*

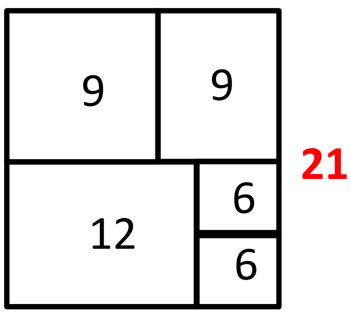
Jour 1 – Problème 10 – Découpe carrés

- **Si** un côté n'est pas le départ d'une coupe, c'est 18 et il reste un rectangle 2 x 18 qui doit être découpé en au moins 9 carrés, soit 10 au total



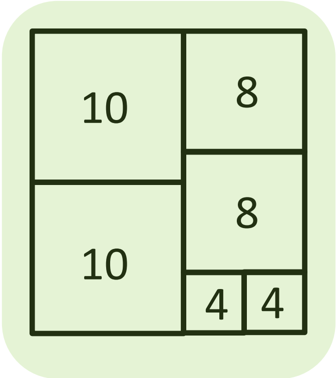






- **Si** chaque côté est le départ d'une coupe, qu'il y ait 4 ou 5 carrés, on arrive à une contradiction

- On peut diviser le tableau en **6** carrés
  (le dessin indique le côté de chacun d'eux)

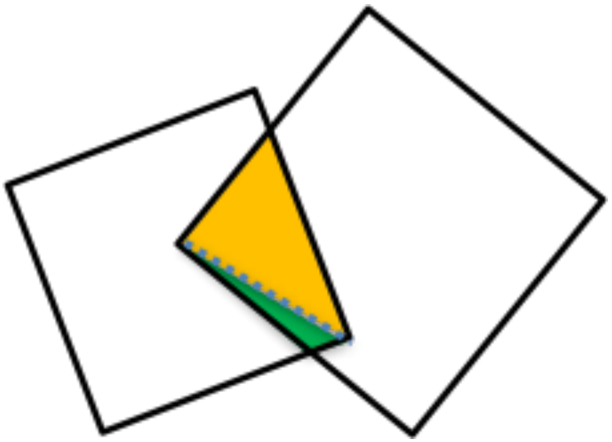


Jour 1 – Problème 11 – Le centenaire

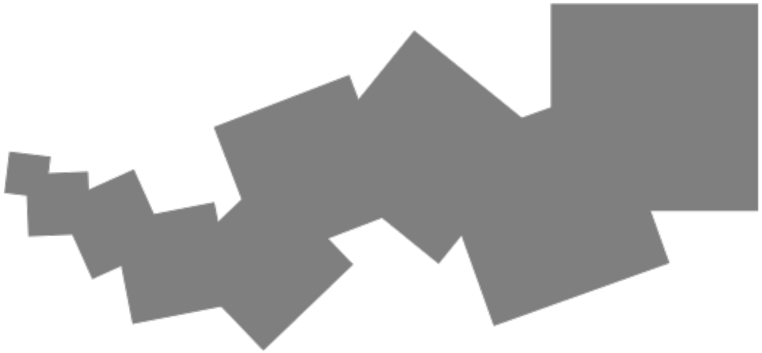
- Soient 1BCD < A'B'C'D' les années de naissance et de mort
- DCB1 – 1BCD = D'C'B'A' – A'B'C'D'
- $999\,(D - 1) + 90\,(C - B) = 999\,(D' - A') + 90\,(C' - B')$
- $3^3 \times 37 \times (D - 1 + A' - D') = 2 \times 3^2 \times 5 \times (C' - B' + B - C)$
- $D - 1 + A' - D' = C' - B' + B - C = 0$

- **Si** $A' = 2$, $D' = D + 1$, $B' = 0$ (nous sommes en 2018), $C' = C - B$
- L'âge est 10(C-B)(D+1) – 1BCD = $1001 - 110 \times B$
- $B = 8$, l'âge est 121 ans *($C = 8$ et $1 \leq D \leq 8$ ou $C = 9$ et $1 \leq D \leq 7$)*
- **Si** $A' = 1$, $D' = D$, $C' - C = B' - B$
- L'âge est 1B'C'D – 1BCD = $110 \times (B' - B)$
- $B' - B = 1$, l'âge est 110 ans *($B \leq 8$, $C \leq 8$, $1 \leq D$)*
- Matt Uvu venait d'avoir **110** ou **121** ans

Jour 1 – Problème 12 – L'ombre chinoise



- Les triangles verts sont égaux
car ils ont un côté de même longueur
(un demi côté du petit carré)
compris entre deux angles égaux
- Quand un grand carré intersecte le précédent, nous perdons une aire égale au quart du plus petit



- $3/4\,(2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2) + 10^2$
$= 3/4\,(4 + 9 + \ldots + 100) + 100$
$= 3/4\,(284) + 100 = 213 + 100 = 313$

- L'aire de la surface grise est **313** cm²

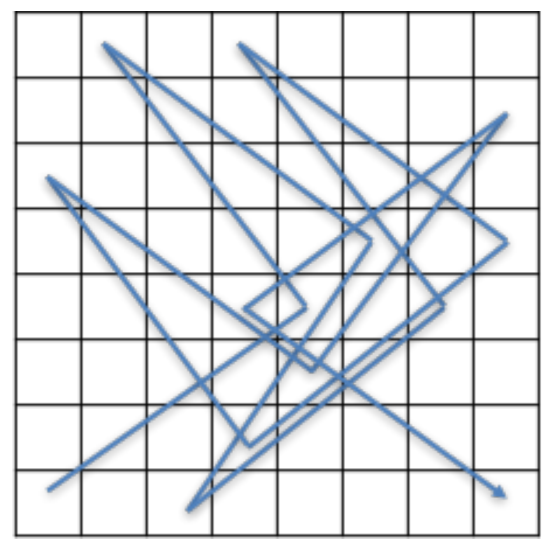
Jour 1 – Problème 13 – Le cavalier king size

- Numérotons 0 la case de départ puis, successivement, 1 de plus chaque case atteignable au saut suivant

- Les cases roses sont à éviter car elles font revenir en arrière

- Les cases vertes montrent l'exemple d'un chemin minimal, en **13** sauts

13	2	9	6	7	4	11	2
2	11	6	5	8	9	4	11
9	6	7	10	3	10	9	4
6	5	10	1	12	3	8	7
7	8	3	12	1	10	5	6
4	9	10	3	10	7	6	9
11	4	9	8	5	6	11	2
0	11	4	7	6	9	2	13



Jour 1 – Problème 14 – Les diamants

- Soient $a \leq b$ les poids (en carats) des deux nouveaux diamants et α le coefficient de proportionnalité
- $60690 = \alpha\,(a + b)^2$ et $35490 = \alpha\,(a^2 + b^2)$

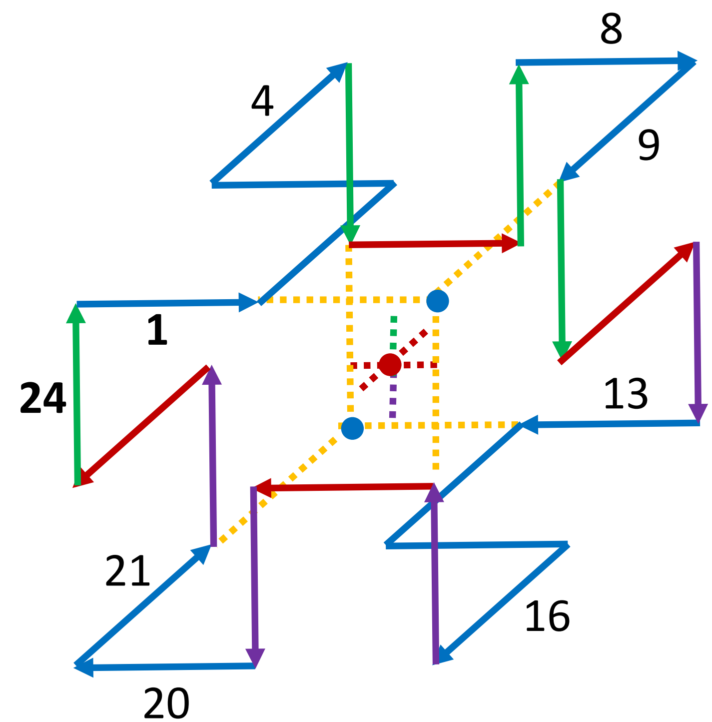
- $(a + b)^2 / (a^2 + b^2) = 60690 / 35490 = 289 / 169$
- $x = b/a$ vérifie $x^2 – 169x/60 + 1 = 0$
- Le discriminant est le carré de 119/60, $x = 12/5$ ($x \geq 1$)

- $\alpha\,(b^2 - a^2) = 35490\,(b^2 - a^2) / (a^2 + b^2) = 35490\,(x^2 - 1) / (x^2 + 1)$
$= 35490\,(12^2 - 5^2) / (12^2 + 5^2) = 210 \times (12^2 - 5^2) = 210 \times 17 \times 7$

- L'écart entre les prix des deux nouveaux diamant est **24990** Euros

Jour 1 – Problème 15 – Le termite

- Sur le niveau en haut ou en bas, il y a au maximum 4 (côtés) + 2 (centre) = 6 tronçons
- Sur le niveau au milieu
  - Soit le circuit ne passe pas par le centre, il y a au maximum 4 tronçons (côtés) sur ce niveau et 8 (pair) tronçons qui relient les deux autres niveaux
  - Soit le circuit passe par le centre, il y a au maximum 6 tronçons sur ce niveau mais on perd 2 tronçons qui relient les deux autres niveaux (aux extrémités des tronçons qui passent par le centre)
- Théoriquement, le nombre de tronçons est au maximum 24



- C'est possible
- La galerie passe par **24** petits cubes

Jour 1 – Problème 16 – L'effet d'échelle 1/2

AB x CDEF = GHI00

- Le problème revient à résoudre un cryptogramme sans 0 mais avec deux 0 à droite
- AB n'étant pas divisible par 4, EF l'est et AB = 25 ou 75

- **Si** AB = 25, 7 CDEF $\equiv$ (1 + 3 + 4 + 6 + … + 9 – CDEF) donc CDEF $\equiv$ 7 (et GHI $\equiv$ 4) modulo 9
- **Si** la somme des chiffres de CDEF est 25, C = 3 et, dans le désordre, DEF = 986 puis, dans l'ordre (divisibilité de EF par 4) DEF = 968 ou 896, mais 25 x 3968 = 99200 et 25 x 3896 = 97400, G = D ou E
- La somme des chiffres de CDEF est 16, C = 3 et, dans l'ordre, DEF = 148 ou 184 ; 25 x 3148 = 78700 est impossible ; 25 x 3184 = 79600 donne la 1ère réponse, **7, 96** euros

Jour 1 – Problème 16 – L'effet d'échelle 2/2

$$\boxed{A|B} \times \boxed{C|D|E|F} = \boxed{G|H|I|0|0}$$

- Si AB = 75, 3 CDEF ≡ (1 + … + 4 + 6 + 8 + 9 – CDEF) donc CDEF ≡ 6 (et GHI ≡ 0) modulo 9
- Si la somme des chiffres de CDEF est 24, C = 1 et, dans l'ordre (divisibilité de EF par 4), DEF = 896 ou 968 ; mais 75 x 1896 et 75 x 1968 sont supérieurs à 100000
- La somme des chiffres de CDEF est 15, C = 1 et, dans l'ordre, DEF = 1932, 1824, 1428, 1248 ou 1284 ; 75 x 1932 = et 75 x 1824 sont supérieurs à 100000 ; 75 x 1248 = 93600 et 75 x 1284 = 96300 donnent les 2ème et 3ème réponses, **9, 36** et **9, 63** euros

FFJM - 32e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 17 – Devine masse 1/2

- Soient a < b < c < d < e < f six nombres entiers totalisant 52
- 10 triplets pouvant compléter f sur le plateau le plus léger, le dessin illustre l’ordre dont on est sûr
- Les 5 paires surlignées en rouge, toutes au moins égales à bd, ne le peuvent pas car bdf > ace
- Pour atteindre la probabilité 2/5, soit 4 paires, il faut écarter bc ou ae
- **Si** nous écartons ae, bcf < ade et adf < bce, bcff < adef < bcee qui est impossible car e < f
- Écartons bc, ade < bcf et **aef < bcd**, la première étant une conséquence de la seconde

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & de \\
 & & & & & & \vee \\
 & & & & cd & < & ce \\
 & & & & \vee & & \vee \\
 & & bc & < & bd & < & be \\
 & & \vee & & \vee & & \vee \\
ab & < & ac & < & ad & < & ae
\end{array}$$

Jour 1 – Problème 17 – Devine masse 2/2

- Raisonnons sur les écarts (strictement positifs) $b = a + v$, $c = b + w$, $d = c + x$, $e = d + y$ et $f = e + z$ (la masse la plus lourde est $a + v + w + x + y + z$)
- **aef < bcd** devient $x + 2y + z < v$, $v \geq 5$
- $6a + 5v + 4w + 3x + 2y + z = 52$

- **Si** $a = 3$, $10 \leq 4w + 3x + 2y + z = 34 - 5v \leq 9$ qui est impossible
- Si $a = 2$, $10 \leq 4w + 3x + 2y + z = 40 - 5v$
  - **Si** $v = 5$, $x = y = z = 1$, $4w = 9$ qui est impossible
  - $v = 6$, $w = x = y = z = 1$, d'où la 1ère réponse **12**
- Si $a = 1$, $10 \leq 4w + 3x + 2y + z = 46 - 5v$
  - **Si** $v = 5$, $x = y = z = 1$, $4w = 15$ qui est impossible
  - **Si** $v = 6$ et $w = 2$, $x = 1$, $x + 2y + z = 6 < 6$ qui est impossible
  - $v = 7$, $x = y = w = 1$ et $z = 2$, d'où la 2ème réponse **13**

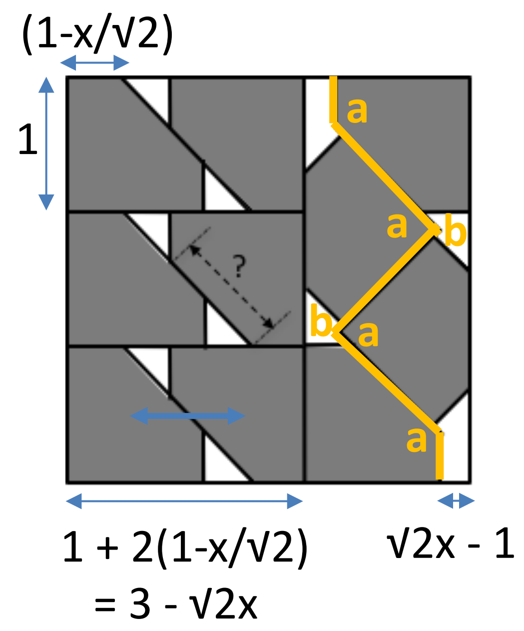
- Le poids de la masse la plus lourde est **12** ou **13** g

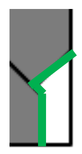
Jour 1 – Problème 18 – Les pianos

- Soient 1 le grand côté d'un pentagone (celui du grand carré est 3) et x la longueur du clavier, a et b les petits dépassements

- Tracé **orange**
  - À l'horizontale $(1 + 2a - b)/\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}x$
  - À la verticale $3 = 2(1 - x/\sqrt{2}) + (3 + 2a + b)/\sqrt{2}$
- Par différence, $a = 3\sqrt{2}/4 - 1$
- Tracé **vert** à l'horizontale
  - $- a/\sqrt{2} + (1 - x/\sqrt{2})/\sqrt{2} = \sqrt{2}x - 1$
- En remplaçant a, $x = (15 - 2\sqrt{2})/14$

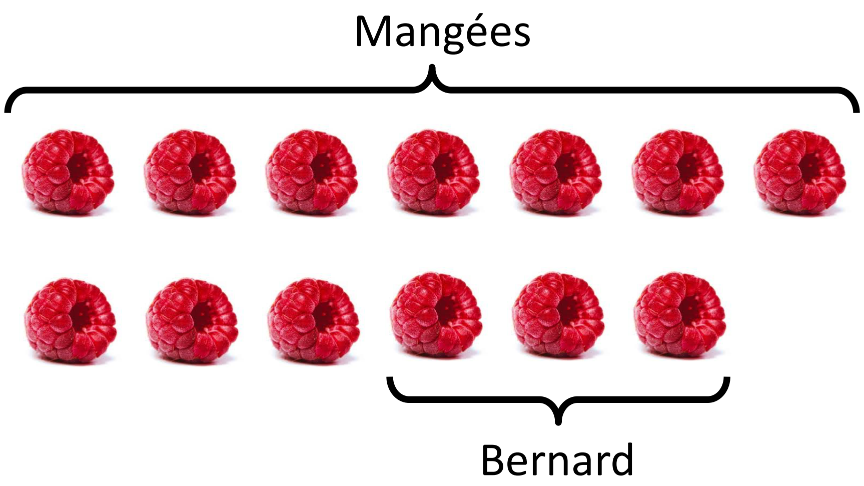
- En multipliant par 5000/3 et en prenant $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, la réponse est **1449** mm





Jour 2 – Problème 1 – Les framboises

- Après avoir mangé 7 framboises, Anne a 13 – 7 = 6 framboises qui lui restent
- 6 / 2 = 3
- Elle donne **3** framboises à Bernard



Jour 2 – Problème 2 – La calculatrice défaillante

- La 4ème opération est fausse
- Au moins un des chiffres 4, 7 et 9 est faux
- 9 n'est pas faux à cause de la 1ère opération (ni 1 ni 8 ne peuvent être faux à cause des 3ème et 2ème opérations)
- **Si** 7 est faux, 4 n'est pas faux, 7 est échangé avec 5, d'où une contradiction à cause de la 3ème opération
- 4 est faux, il est échangé avec 2 (la 2ème opération reste juste), 4 + 2 = 6
- La somme des deux chiffres échangés est **6**

« 9 – 1 = 8 »

« 8 ÷ 2 = 4 »

« 3 x 5 = 15 »

« 4 + 7 = 9 »

Jour 2 – Problème 3 – Les palindromes

- À part 10 au tout début, chaque série de nombres sans palindrome en compte 10
- Pour être sûr qu'il y ait au moins un palindrome parmi eux, il doit demander au moins 10 + 1 = **11** nombres

10
11
12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
22
23 ... 32
33
34 ... 43
44
45 ... 54
55
56 ... 65
66
67 ... 76
77
78 ... 87
88
89 ... 98
99

Jour 2 – Problème 4 – Entre 20 et 18

- Quand on obtient un nombre impair, on ne peut pas le diviser par 2 et il reste impair si on lui ajoute 4
- La première fois que l'on obtient un nombre impair, tous les suivants seront aussi impairs
- En particulier, on ne pourra pas obtenir 20

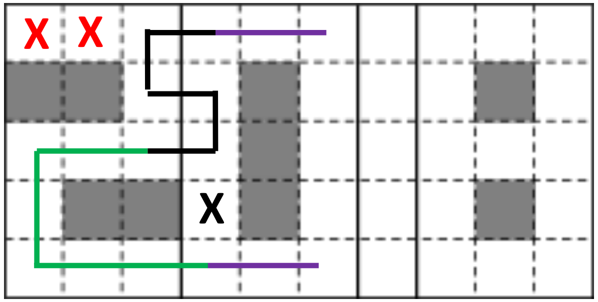
- En partant de 18, il faut éviter 9 donc obtenir 22
- Puis il faut éviter 11 donc obtenir 26
- Etc. on ajoute sans cesse 4
- C'est impossible, la réponse est **0**

- *Tous les nombres ont pour reste 2 dans la division par 4, ils sont de la forme $4N + 2$; il faut éviter $2N + 1$ donc obtenir $4N + 2 + 4 = 4(N+1) + 2$*

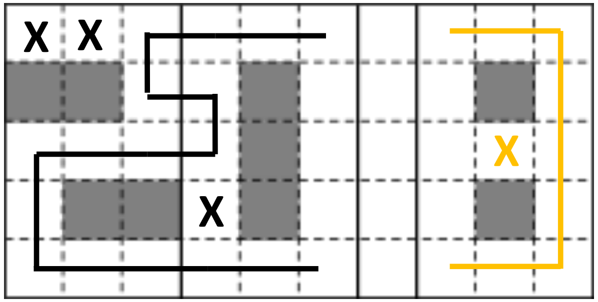
FFJM - 32e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 5 – Le circuit de l’année

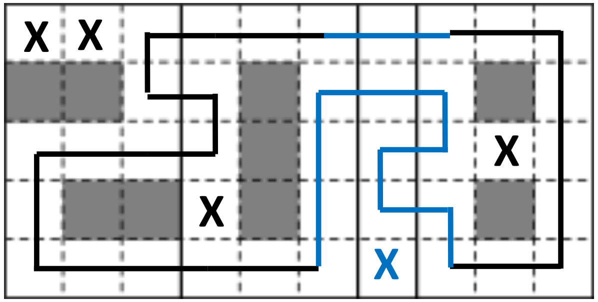
- Les 2 cases marquées X sont perdues
- Si on ne suit pas le tracé vert, on perd 6 cases
- Si on ne suit pas les tracés violets, on perd toutes les cases à droite (aller retour)
- On complète et on perd une case



- Si on ne suit pas le tracé orange, on perd 3 cases au coin haut ou bas
- On perd une case



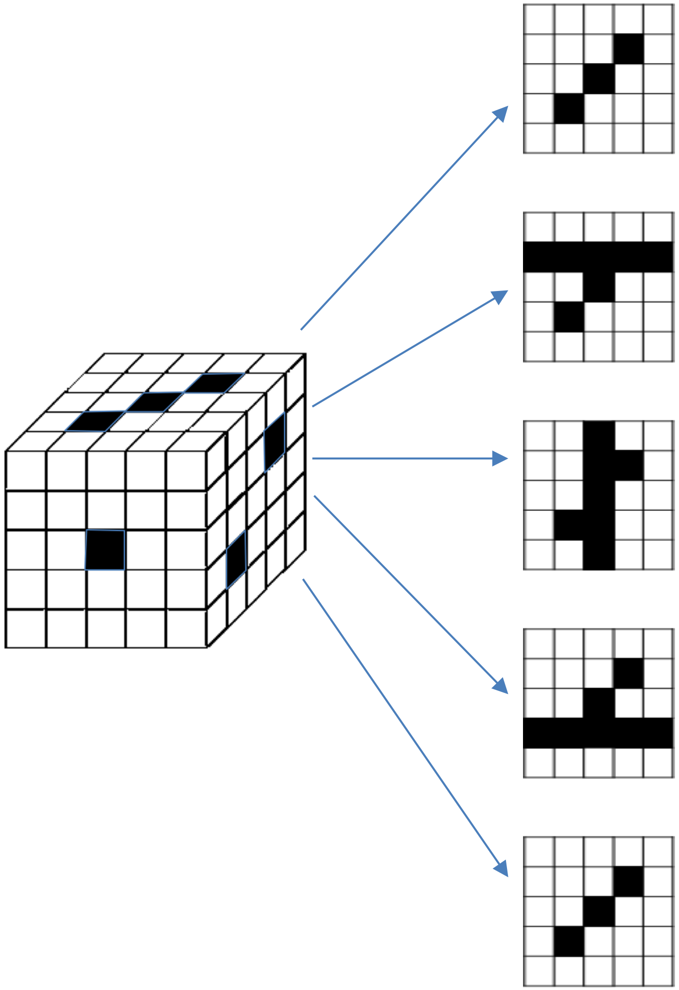
- On termine(7 possibilités)
- On perd une dernière case
- Le nombre de cases blanches par lesquelles on ne passe pas est au moins 2 + 1 + 1 + 1 = **5**



FFJM - 32e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 6 – Le dé troué

- Du haut vers le bas, on compte les trous noirs par étage (cela évite de les compter deux fois)
- Le trou de « 3 » est présent à tous les étages, celui de « 2 » aux deuxième et quatrième, celui de « 1 » au troisième
- 3 + 7 + 7 + 7 + 3 = 27
- Le nombre total des petits cubes enlevés est **27**



Jour 2 – Problème 7 – Les pièces de monnaie

- Le tableau présente les possibilités pour les pièces 5 et 10 (pas 20)
- S'il y a au moins une pièce 1, le montant ne dépasse pas 18
  - S'il y au moins deux pièces 1, on peut les remplacer par une pièce 2 car cela ne change rien au montant et cela diminue les autres possibilités
  - S'il y a une pièce 1 et deux pièces 2, on peut les remplacer par une pièce 5
  - S'il y a une pièce 1 et au plus une pièce 2, le montant ne dépasse pas 1+2+15
- S'il n'y a pas de pièce 1 et s'il a quatre pièces 2, le montant ne dépasse pas 0 + 8 + 5 = 13 (pas 18)
- Le montant maximum est **21** centimes, obtenu avec le porte-monnaie 2 2 2 5 5 5 ou 2 2 2 5 10

5	10
1	1
0	1
3	0
2	0
1	0
0	0

FFJM - 32e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 8 – Plus ou moins un

- Aux rotations près, tous les cas possibles sont illustrés ci-contre
- Le score est 9 fois le nombre de Bob plus la somme de tous les écarts
- Seuls les deux cas du bas permettent d'obtenir le score 18
- Le nombre de Bob est 2
- Les entiers naturels sont non nuls donc les écarts -2 sont alors interdits
- Alice peut obtenir **7** autres scores

0, +2	+1	0, +2
+1	0	+1
0, +2	+1	0, +2

22, 24, 26, 28, 30

0, $-\cancel{2}$	-1	0, $-\cancel{2}$
-1	0	-1
0, $-\cancel{2}$	-1	0, $-\cancel{2}$

14

0, +2	+1	0, +2
+1	0	+1
0	-1	0

20, 22, 24

0, $-\cancel{2}$	-1	0, $-\cancel{2}$
-1	0	-1
0	+1	0

16

0	+1	0, +2
-1	0	+1
0, $-\cancel{2}$	-1	0

18, 20

0	+1	0
-1	0	-1
0	+1	0

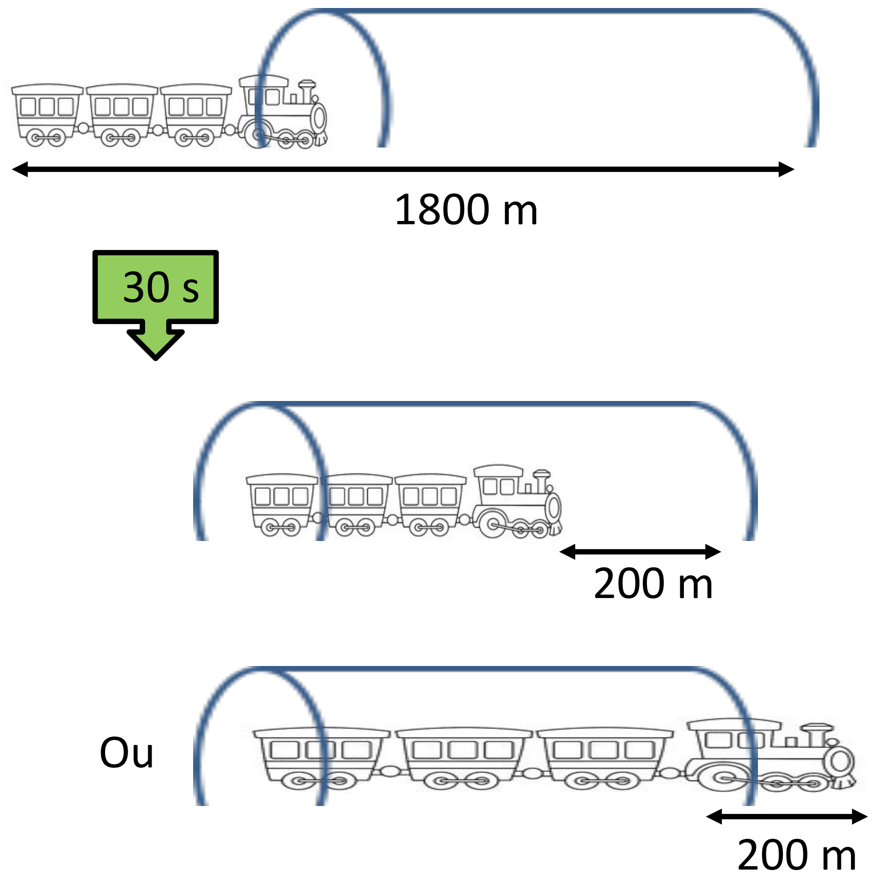
18

Jour 2 – Problème 9 – La sortie du tunnel

- Soient respectivement Tr et Tu les longueurs du train et du tunnel
- Tr + Tu = 1800
- Tu – Tr = 200 ou bien Tr – Tu = 200
- Tr = 800 ou 1000 m (km / 1000)

- Le train met 30 s soit 30/(60x60) = 1/120 heure pour parcourir Tr

- La vitesse du train est
  120 x 0,8 = **96** km/h
  ou bien 120 x 1 = **120** km/h

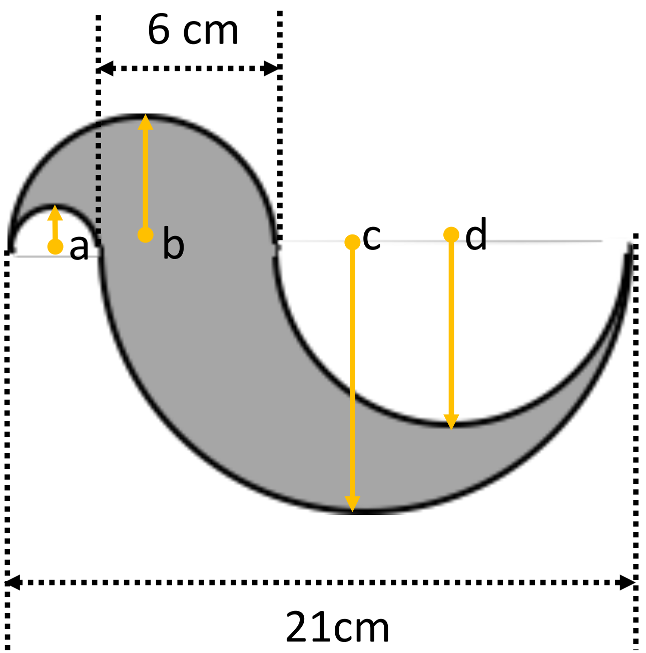


Jour 2 – Problème 10 – Le boomerang

- Soient a, b, c et d les rayons des demi-cercles

- $2b - 2a = 2c - 2d = 6$ (énoncé)
- $b = a + 3$ et $d = c - 3$
- $2b + 2d = 2a + 2c = 21$ (énoncé)
- $c = 10{,}5 - a$ et $d = 7{,}5 - a$

- $\pi(b^2 - a^2 + c^2 - d^2)/2 = 63\pi/2$
- En prenant $\pi \cong 22/7$, l'aire de la surface grise est **99** cm^2



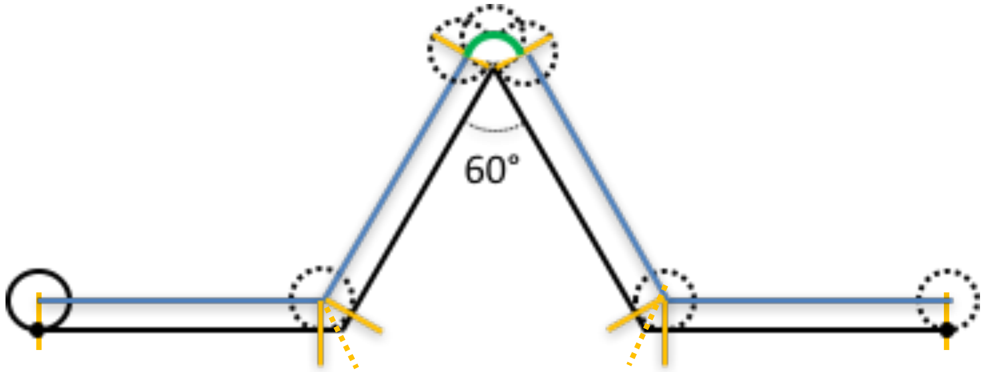
Jour 2 – Problème 11 – Le nombre de l'année

- Le multiple de 2018 cherché, forcément pair, finit par 4 ou par 6
- Le facteur F finit par 2, 3, 7 ou 8 (8F finit par 4 ou 6)
- Modulo 9, 2 F $\equiv$ (3 + … + 7 + 9) $\equiv$ 7 donc F $\equiv$ 8
- F est compris entre 172 et 483 (345679 et 976543 / 2018)

- Les 14 F à tester sont 188, 197, 233, 242, 278, 287, 323, 332, 368, 377, 413, 422, 458 et 467
- En testant le chiffre des dizaines du produit de 18 par le nombre formé avec les deux derniers chiffres de F, 8 sont éliminés
- Les F restant à tester sont 197, 233, 242, 332, 413 et 422

- Nous obtenons 397546, 470194, 488356, 669976, 833434 et 851596,
- Seul le premier multiple convient, le nombre de l'année est **197**

Jour 2 – Problème 12 – Le rocher



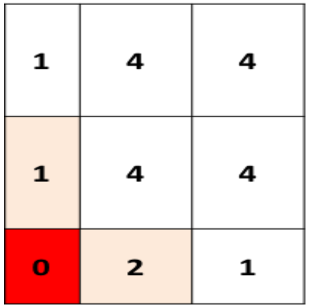
- Chacun des tronçons horizontaux ou obliques mesure 10 moins tg30° = √3/3 fois 0,75 (le rayon du rocher) soit 10 – √3/4 m
- En haut, le centre du rocher suit la circonférence d'un cercle de rayon 0,75 selon un angle de 120°, il parcourt $\frac{2\pi \, x \, 0{,}75}{3}$ = $\pi/2$ m
- Le total est 4 x (10 – √3/4) + $\pi/2$ = 40 – (2√3 - π)/2 m
- (2√3 - π)/2 ≅ 0,16
- Le centre du rocher parcourt environ 39,84 m = **3984** cm

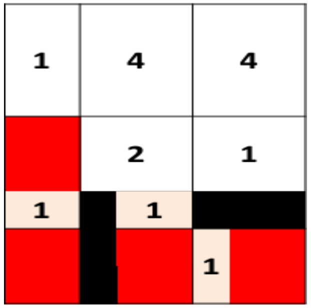
Jour 2 – Problème 13 – L'échiquier

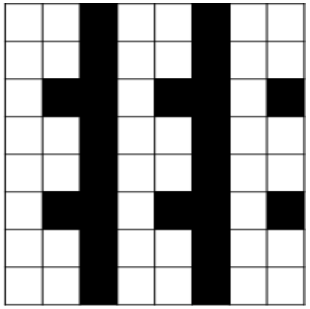
- Les quatre carrés 3 x 3 en haut à droite ont chacun 4 pièces
- Chaque rectangles 2 x 3 ou 3 x 2 a au moins une pièce car il ne peut être complété en un carré 3 x 3 que par au plus 3 pièces
- Le carré adjacent aux deux rectangles roses aurait au moins cinq pièces si chacun d'eux n'en n'avait qu'une

- Afin d'obtenir 21, nous arrivons à une impossibilité en bas au 4ème carré 3 x 3 à partir de la gauche

- On peut obtenir 22
- Le nombre de pièces sur l'échiquier est **22**

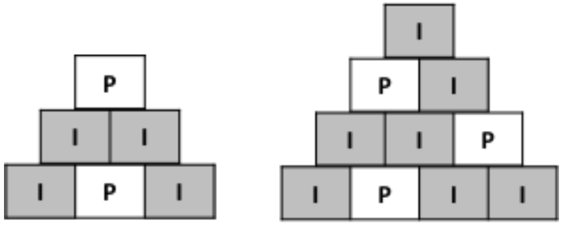




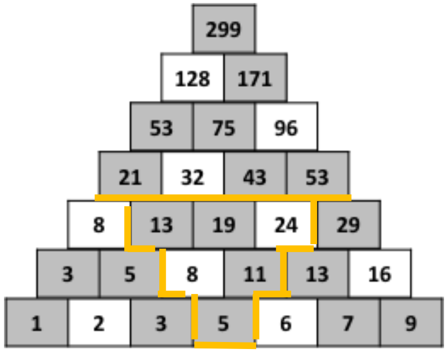


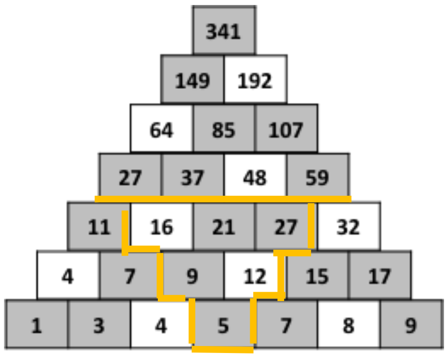
Jour 2 – Problème 14 – La pyramide pair impair

- Des pyramides de bases 3 et 4 contiennent respectivement au plus 4 et 7 nombres impairs
- Aux rotations et symétries près,
  les configurations sont uniques



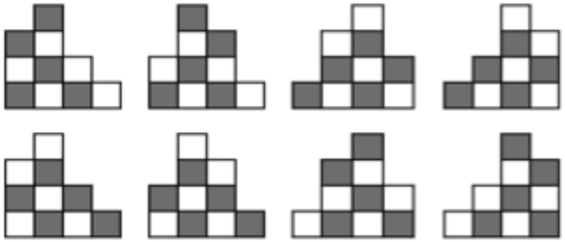
- La pyramide de base 7 est partagée entre une de 4 en haut (deux cas en inversant gauche et droite) et trois de 3 en bas qui s'en déduisent automatiquement (en partant de celle du milieu, orientée vers le bas)
- Le maximum de 19 = 7 + (3 x 4) est forcément atteint avec les configurations précédentes





- Est écrit dans la case en haut **299** ou **341**

Jour 2 – Problème 15 – Les tours équilibrées



- Une fois colorié, un étage est placé d'une façon sur l'étage précédent
- Pour chacun des 5 étages ayant autant de carrés blancs que de carrés gris, il y a 2 façons de colorier, d'où 2^5 = 32 cas
- Pour chacun des 6 autres étages, il y en a 3 avec un carré blanc en plus et 3 avec un carré gris en plus, d'où un nombre de cas égal à celui des sous-ensembles à 3 éléments d'un ensemble à 6 éléments, 6 ! / (3 ! x 3 !) = 20
- On compte 32 x 20 = **640** tours de 11 étages

Jour 2 – Problème 16 – Le cryptarithme de l'année

δ	γ	β	α	
	D	E	U	X
M	I	L	L	E
		D	I	X
	H	U	I	T
X	X	X	X	X

- L = 0, U = 7, X impair (énoncé)

- X < X + E + X + T < X + 30 donc $1 \leq \boldsymbol{\alpha} \leq 2$
- $\boldsymbol{\alpha}$ + 7 + 0 + 2I = X + 10$\boldsymbol{\beta}$ donc $\boldsymbol{\alpha}$ est pair
- $\boldsymbol{\alpha}$ = 2
- E + X + T = 20 donc {E, T, X} = {3, 8, 9} ou {5, 6, 9}

- Si $\boldsymbol{\beta}$ = 2, 2I = X + 11
- I ≠ U = 7 donc X ≠ 3, I < 10 donc X ≠ 9, X = 5, I = 8, {E, T} = {6, 9}
- 2 + E + 0 + D + 7 = 5 + 10$\boldsymbol{\gamma}$
  - Soit E + D = 6 ($\boldsymbol{\gamma}$ = 1) et D = 0 = L
  - Soit E + D = 16 ($\boldsymbol{\gamma}$ = 2) et D = 7 = U
- $\boldsymbol{\beta} \leq 3$ (9 + 2I – X < 30) donc $\boldsymbol{\beta}$ = 1

Jour 2 – Problème 16 – Le cryptarithme de l'année

- L = 0, U = 7, X impair, {E, T, X} = {3, 8, 9} ou {5, 6, 9}
- 2I = X + 1 et 1 + E + 0 + D + 7 = X + 10γ

- **Si** X = 3, I = 2, $\{E, T\} = \{8, 9\}$, E + D = 15 (γ = 2)
  - Soit E = 8 et D = 7 = U
  - Soit E = 9 et D = 6, 2 + 6 + 2 + H = 3 + 10δ, H = 3 = X (δ = 1)
- **Si** X = 9, I = 5, $\{E, T\} = \{3, 8\}$, E + D = 11 (γ = 1), D = T
- X = 5, I = 3, $\{E, T\} = \{6, 9\}$
  - Soit E + D = 7 (γ = 1), E = 6 et T = 9, D = 1, 1 + 1 + 3 + H = 5 + 10δ, H = 0 = L (δ = 0)
  - Soit E + D = 17 (γ = 1), E = 9 et T = 6, D = 8, 1 + 8 + 3 + H = 5 + 10δ, H = 2 (δ = 1), M = X – 1 = 4

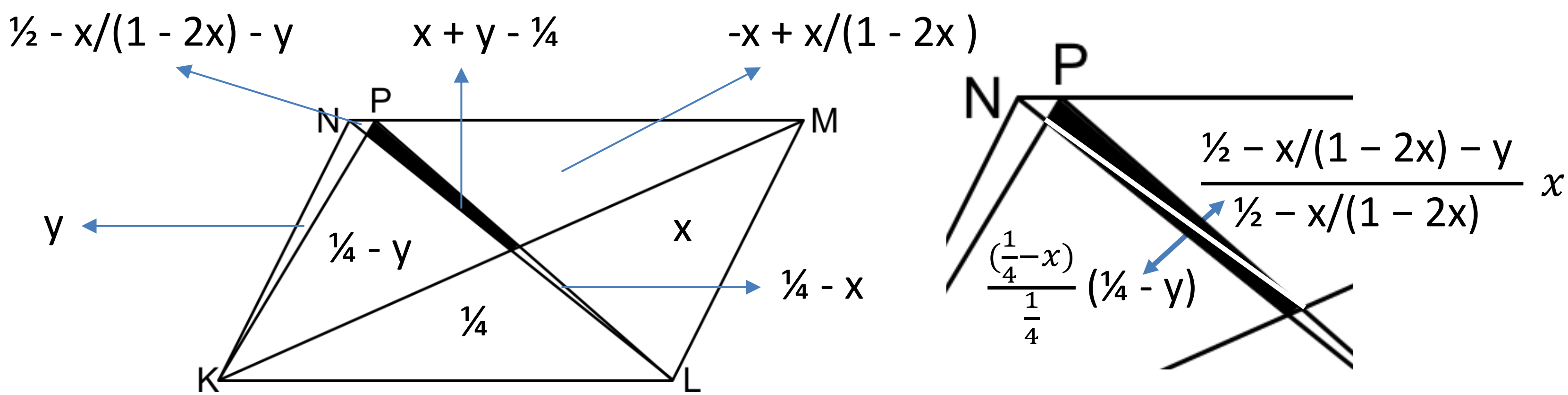
- D'où l'unique réponse : MX EDITH représente **45 98362**
  (c'est le chiffre 1 qui n'est pas utilisé)

δ	γ	1	2	
	D	E	7	X
M	I	0	0	E
		D	I	X
	H	7	I	T
X	X	X	X	X

1	2	1	2	
	8	9	7	5
4	3	0	0	9
		8	3	5
	2	7	3	6
5	5	5	5	5

Jour 2 – Problème 17 – Le champ du Père Manan

- Prenons pour unité l'aire de KLMN, deux aires inconnues x et y
- De proche en proche, nous obtenons toutes les aires :



- PM = 16 PN donne x/(1 - 2x) = 16 (½ - x/(1 - 2x)) soit x = 8/33
- La division de l'aire noire en deux à partir de P donne
  x + y - ¼ = (1 - 4x) (¼ - y) + x(1 - y/(½ - x/(1 - 2x)) soit y = 1/36
- Le rapport de l'aire du champ du Père Manan à celle de KLMN est 8/33 + 1/36 – ¼ = **2/99**

Jour 2 – Problème 18 – Tout en puissances

- Soient respectivement S_1 et S_5 les sommes des puissances 1 et 5 des nombres entiers de 1 à N ($S_1 = N(N+1)/2$)
- L'énoncé donne (cela se montre par récurrence) $S_5 = (4S_1 - 1)S_1^2/3$
- Pour N = 13, $S_1 = 91$ et $(4S_1 - 1)/3 = 121$, on retrouve $S_5 = (11 \times 91)^2 = 1001^2 = 1002001$ (énoncé)

- La question revient à chercher N tel que $2N^2 + 2N - 1 = 3Y^2$ ($S_5 = (YS_1)^2$)
- En posant $Z = (2N + 1)/3$, $3Z^2 = 2Y^2 + 1$
- Les solutions sont la double suite des $Y_{k+1} = 5Y_k + 6Z_k$ et $Z_{k+1} = 4Y_k + 5Z_k$
- (Y, Z) = (1, 1), (11, 9), (109, 89), (1 079, 881), etc.
- $N = (3Z - 1)/2$ = 1, 13, 133, 1321, etc.

- Le plus petit nombre entier recherché est **133**