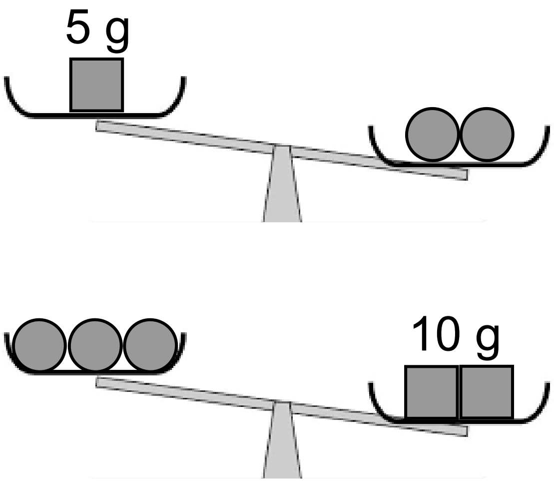
33e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

Finale Internationale des 28 et 29 août 2019

Diapo**RAMA** des solutions

Jour 1 – Problème 1 – La balance

- Une bille pèse
  plus que 2 grammes
- Une bille pèse
  moins que 4 grammes
- Le poids d'une bille est
  3 grammes



Jour 1 – Problème 2 – Le robot

F F J M

- Les deux F sont consécutifs
- Ils ne sont pas au début
  (2 ou 4 lettres à la même place)

  F F M J
  F F J M
- Ils ne sont pas à la fin
  (0 lettre à la même place)

  J M F F
  M J F F
- Ils sont au milieu,
  un F est à la même place
- Le M n'est pas à la fin
  (2 lettres à la même place)

  J F F M
- Le nom du robot est **MFFJ**

  M F F J

FFJM - 33e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 3 – De un à seize

- Si l'on part du 1 vers la droite
- On quitte la première colonne du 7 vers la droite
- À la fin, on y rentre vers le 16
- D'où le 15 et une impossibilité pour le 14

6	10	5	
1	13		2
7			
		4	3

6	10	5	
1	13		2
7			
16	15	4	3

Jour 1 – Problème 3 – De un à seize

- On part du 1 vers le haut
- Que le 5 soit à gauche ou à droite du 4, le 6 est sur la ligne du 7 et le 8 est sous le 7
- Le 9 est à droite du 8 dans la colonne du 10

2	10	3	
1	13		
7			
8		4	

2	10	3	
1	13		
7			
8	9	4	

Jour 1 – Problème 3 – De un à seize

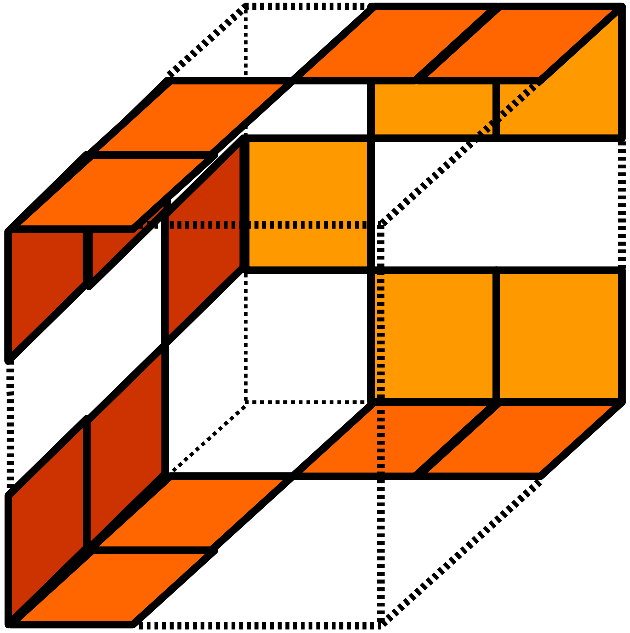
- On peut terminer (d'une seule façon)

2	10	3	11
1	13		12
7	14	15	6
8	9	4	5

	10		
1	13	**16**	
7			
		4	

Jour 1 – Problème 4 – Face à face

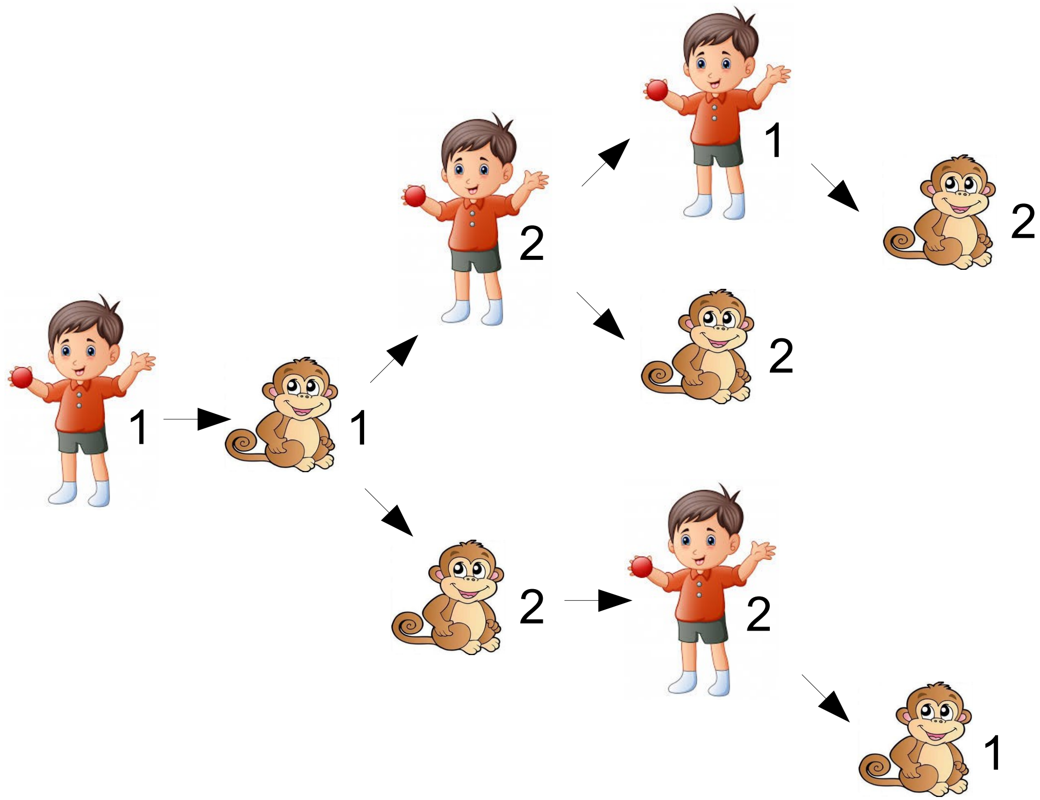
- Alice avait peint complètement **4 faces** du grand cube



Faces du grand cube complètement peintes	Petits cubes dont le nombre de faces peintes est	
	2	3
1	0	
2 adjacentes	3	
2 opposées	0	
3 sans coin	6	0
3 avec 1 coin	6	1
4 sans coin	12	0
4 avec 2 coins	**9**	2
5	12	
6	12	

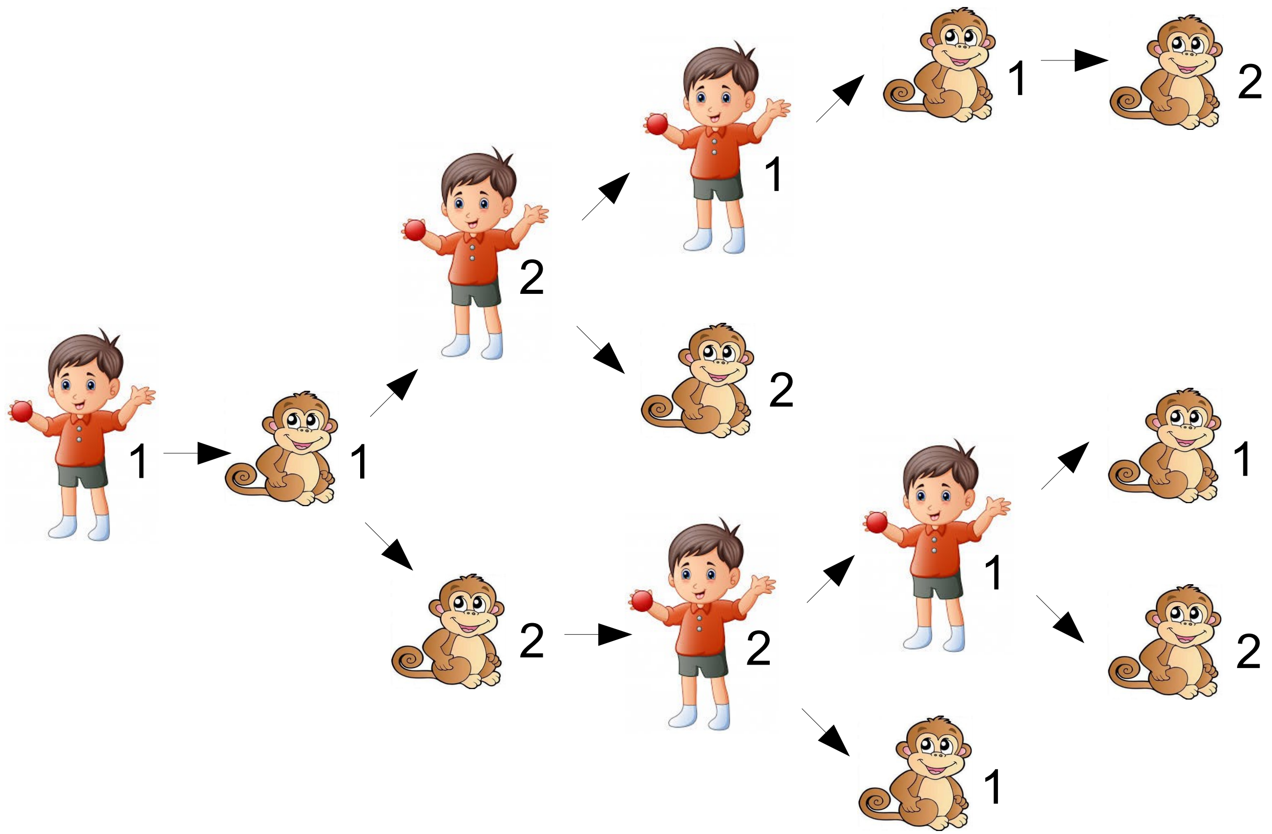
Jour 1 – Problème 5 – Malin comme un singe

- La balle sera envoyée 3 ou 4 fois dans les cas suivants



Jour 1 – Problème 5 – Malin comme un singe

- La balle sera envoyée au maximum **5 fois** au cours de la partie



Jour 1 – Problème 6 – Le cryptarithme de l'année

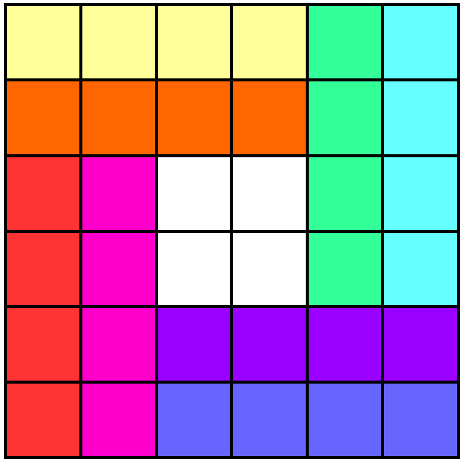
- À droite, Z + X + Y vaut 9 ou 19
  car 9 + 8 + 7 = 24 < 29
- Les retenues (a) puis (b) valent au plus 2
- À gauche, X + Y + Z vaut au moins 18
  (lorsque a vaut 2)
  donc X + Y + Z = 19 (a et b valent 1)
- Au milieu, Y + Z + T vaut 10
- X vaut T plus 9
- La lettre T représente le chiffre **0** (X vaut 9)

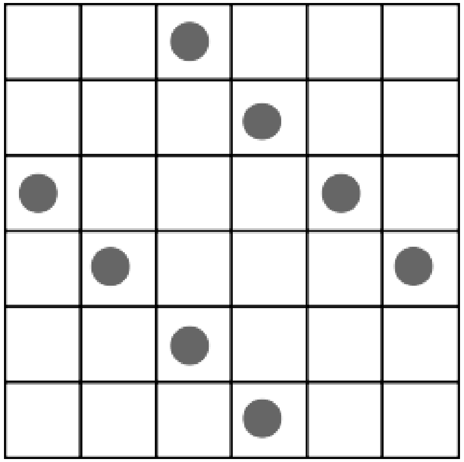
(2) (a) (b)

$$
\begin{array}{rccc}
 & X & Y & Z \\
+ & Y & Z & X \\
+ & Z & T & Y \\
\hline
= 2 & 0 & 1 & 9
\end{array}
$$

Jour 1 – Problème 7 – Du vide, mais pas trop

- Dans chacune des huit bandes de quatre cases, un pion est nécessaire
- Huit pions sont nécessaires
- Huit pions sont suffisants
- On doit placer au moins **8 pions**





Jour 1 – Problème 8 – La suite

- b < a, sinon on les commute (ab + bc devient ba + ac plus petit)
  d < e, sinon on les commute (cd + de devient ce + ed plus petit)
  c < a, sinon on les commute (ab + bc + cd devient ca + ba + ad plus petit)
  c < e, sinon on les commute (bc + cd + de devient be + ed + dc plus petit)
- e = 5, sinon on le commute avec a (droite gauche)
- Il reste cinq cas à tester
- La somme la plus petite possible est **22**

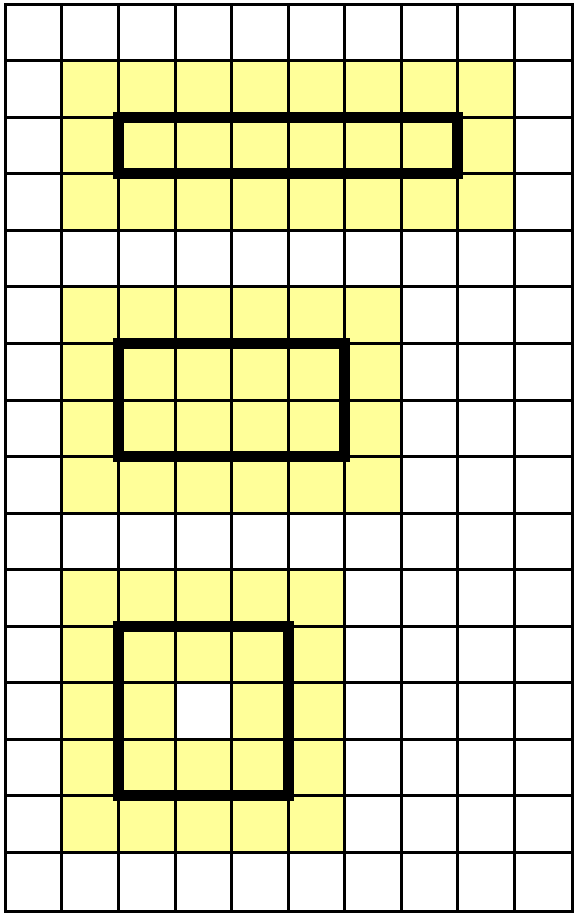
a	b	c	d	e	Somme
3	1	2	4	5	33
3	2	1	4	5	32
4	2	3	1	5	**22**
4	3	2	1	5	25
4	3	1	2	5	27

Jour 1 – Problème 9 – Devine nombre

- 83 x 84 x 85 = 592 620 qui est trop petit
- 84 x 85 x 86 = 614 040
- Pour obtenir un 6 à droite, on saute à 86 x 87 x 88 = 658 416
- Puis à 91 x 92 x 93 = 778 596 qui est trop grand
- 5 841 / 99 = **59**

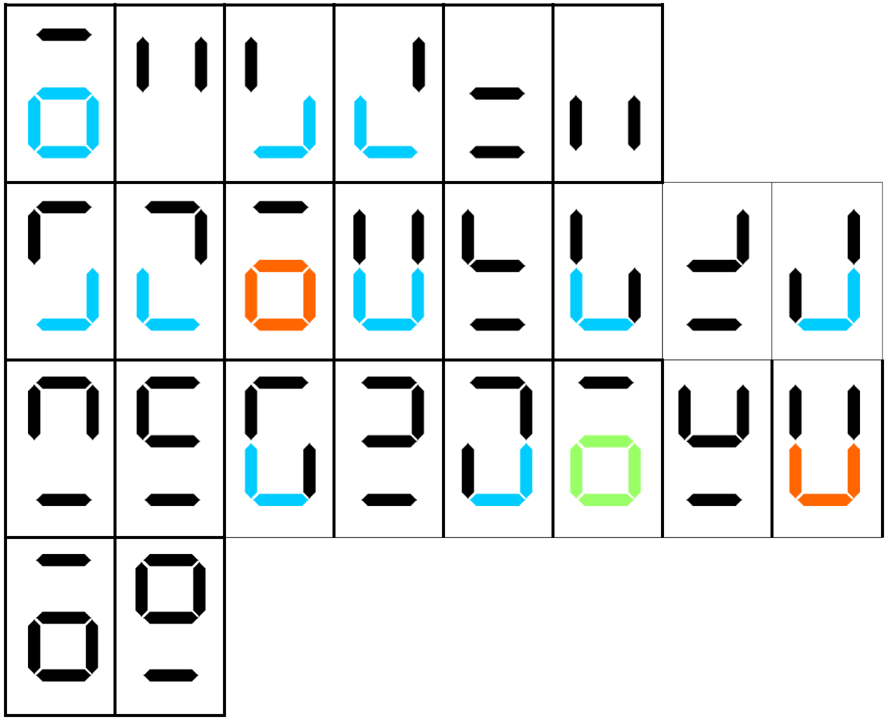
Jour 1 – Problème 10 – Des carrés et un rectangle

- Soient l ≤ L les dimensions du rectangle
- Si l = 1, le nombre des carrés unitaires est 3(L + 2) donc L = 6
- Si l = 2, le nombre des carrés unitaires est 4(L + 2) donc L = 4
- Si l > 2, le nombre des carrés unitaires est 4(l + L) donc l = L = 3
- L'aire du rectangle est **6, 8 ou 9 cm^2**



Jour 1 – Problème 11 – D'un seul tenant

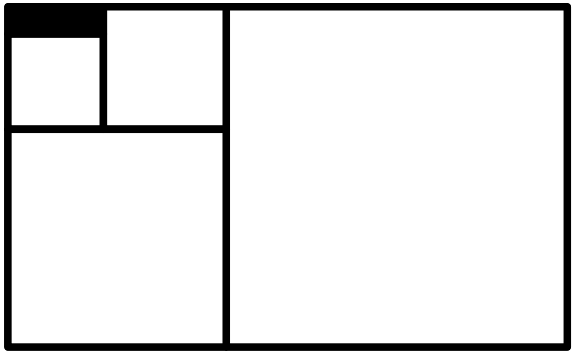
- Il y a 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1
  soit 127 affichages
  avec au moins un segment allumé
- Il y a 0 + 11 + 19 + 15 + 2 + 0 + 0
  soit 47 affichages
  qui ne sont pas d'un seul tenant
  (ci-contre,
  le bleu contient un segment,
  l'orange deux et le vert trois)
- Il y a 127 – 47
  soit **80** affichages d'un seul tenant



Jour 1 – Problème 12 – Le nombre de Trinity

- Un nombre de Trinity n'est pas de la forme a { 1 + b(1 + c) } où b > 1 et c > 1
- Tout nombre impair au moins égal à 7 est de la forme 1 { 1 + 2(1 + c) } où c > 1
- 10 = 1 { 1 + 3(1 + 2) } puis tout nombre pair non multiple de 4 au moins égal à 14 est de la forme 2 { 1 + 2(1 + c) } où c > 1
- 20 = 2 { 1 + 3(1 + 2) } puis tout multiple de 4 mais pas de 8 au moins égal à 28 est de la forme 4 { 1 + 2(1 + c) } où c > 1
- 16 = 1 { 1 + 3(1 + 4) }, 32 = 2 { 1 + 3(1 + 4) }, 40 = 1 { 1 + 3(1 + 12) }, 48 = 3 { 1 + 3(1 + 4) } puis tout multiple de 8 au moins égal à 56 est de la forme 8 { 1 + 2(1 + c) } où c > 1
- Le nombre de Trinity est **8, 12 ou 24**

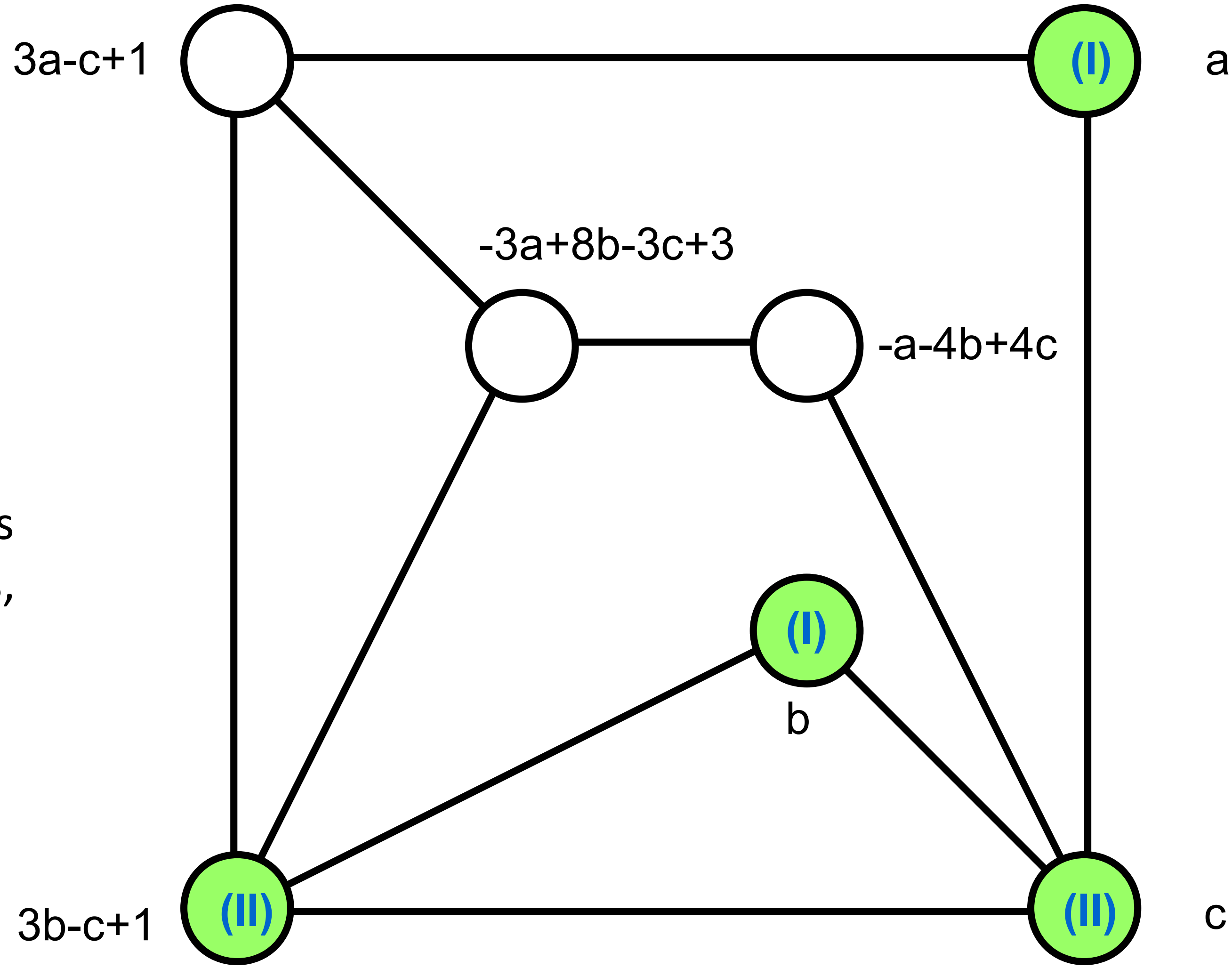
Jour 1 – Problème 13 – Le lotissement de l'année



- Soient $x < y$ les côtés des carrés les plus petits
- $x^2 + y^2 + (x + y)^2 + (x + 2y)^2 = 2019$
- $2y^2 + 2xy + x^2 = 673$, $y = \{\sqrt{(1346 - x^2)} - x\}/2$
- x est impair
- $x < y$ implique $x^2 < 134{,}6 < 190$
- $34 = \sqrt{1156} = \sqrt{(1346 - 190)} < \sqrt{(1346 - x^2)} < \sqrt{(1346 + 23)} = \sqrt{1369} = 37$
- $\sqrt{(1346 - x^2)} = 35$ car 36 supposerait que x soit pair, $x = 11$, $y = 12$
- L'aire du grand rectangle est $(x + 2y)(2x + 3y) = 2030\ m^2$
- L'aire du petit rectangle noir est $2030 - 2019 =$ **11 m^2**

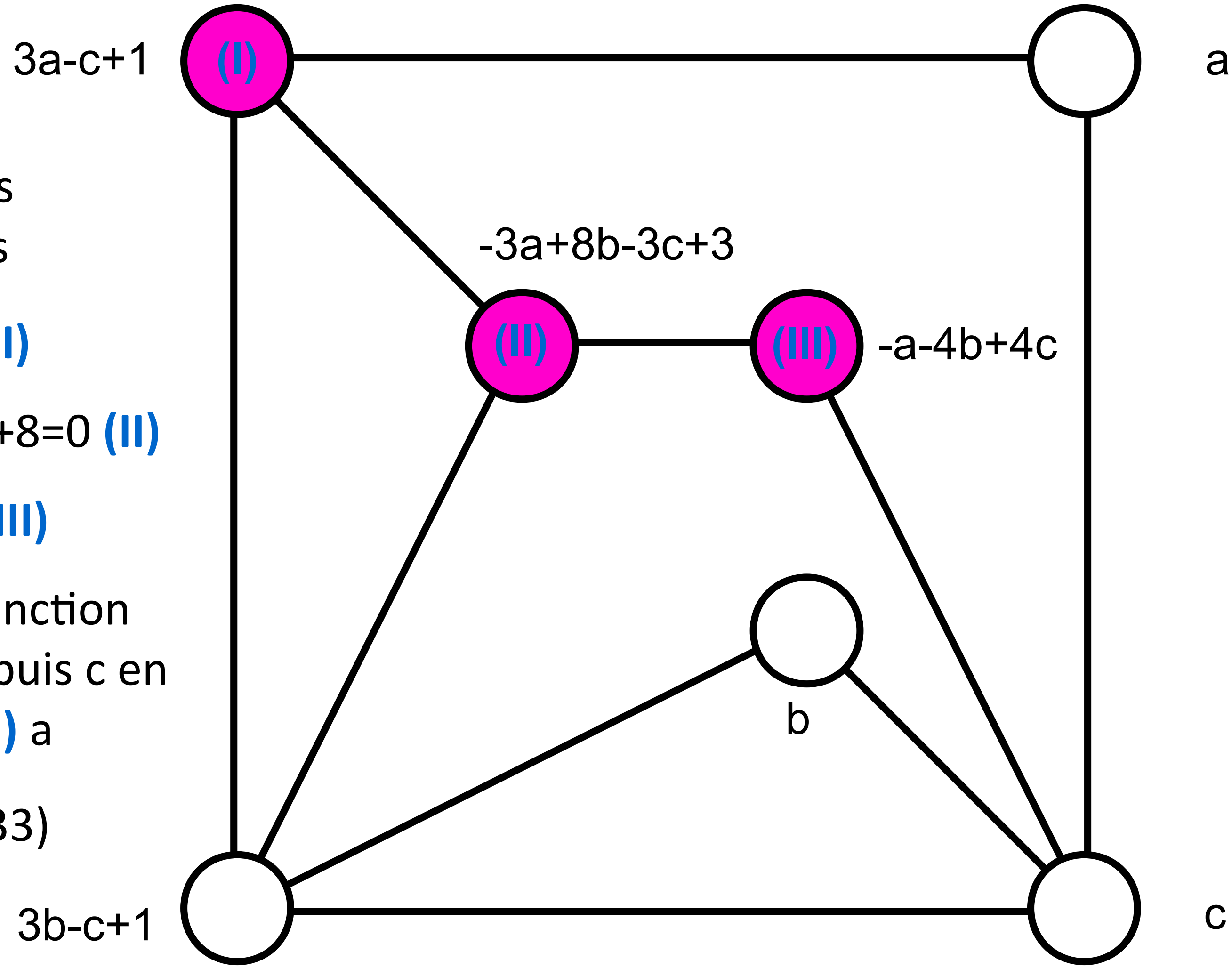
Jour 1 – Problème 14 – Une autoréférence

- Soient
  a, b et c
  des inconnues
- On obtient les autres nombres en satisfaisant la propriété dans les disques verts, en les prenant dans l'ordre **(I)** (gauche) puis **(II)** (centre)



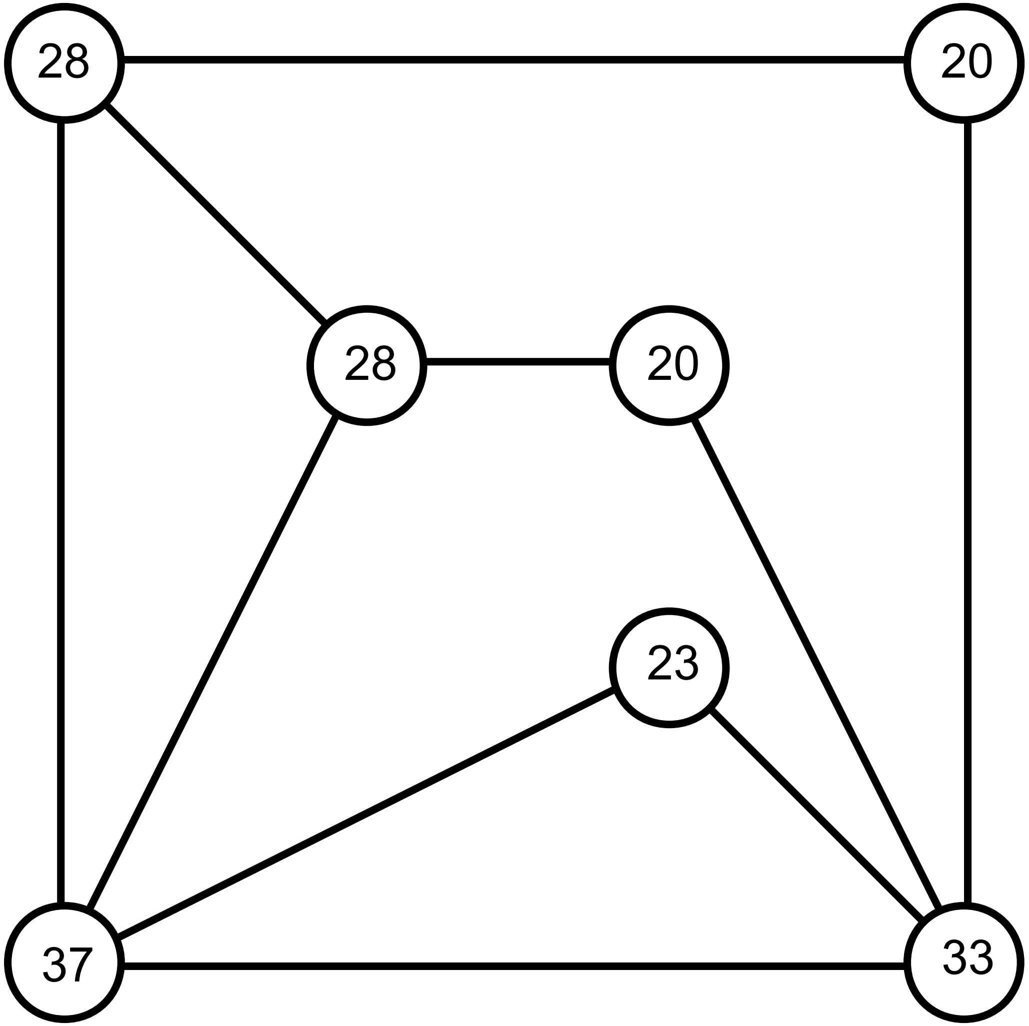
Jour 1 – Problème 14 – Une autoréférence

- On satisfait la propriété dans les disques roses
  - $11a-11b+c=0$ **(I)**
  - $-11a+25b-11c+8=0$ **(II)**
  - $-10b+7c-1=0$ **(III)**
- **(I)** donne c en fonction de a et b, **(III)** b puis c en fonction de a, **(II)** a
- (a,b,c) = (20,23,33)



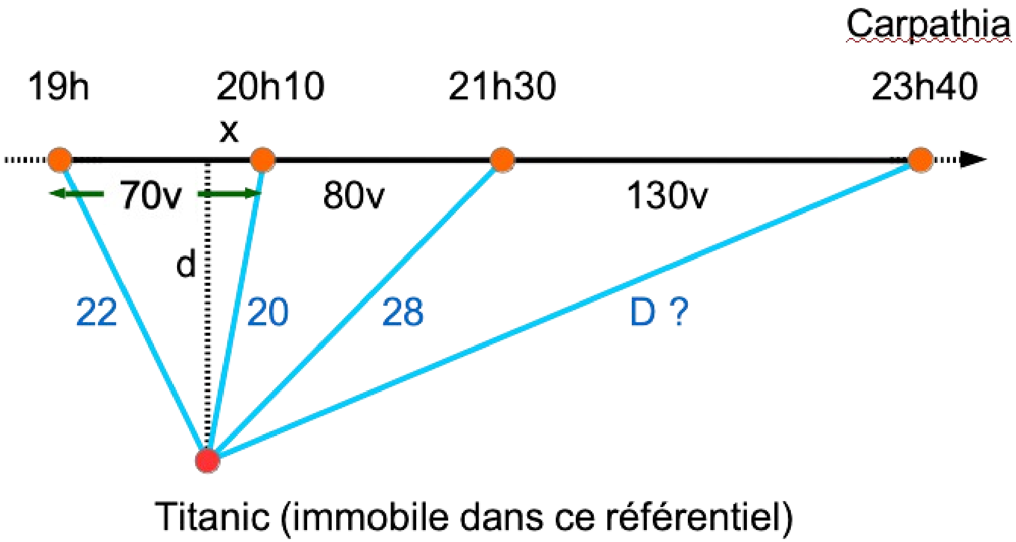
Jour 1 – Problème 14 – Une autoréférence

- La somme
  des sept nombres
  est **189**



Jour 1 – Problème 15 – Au secours

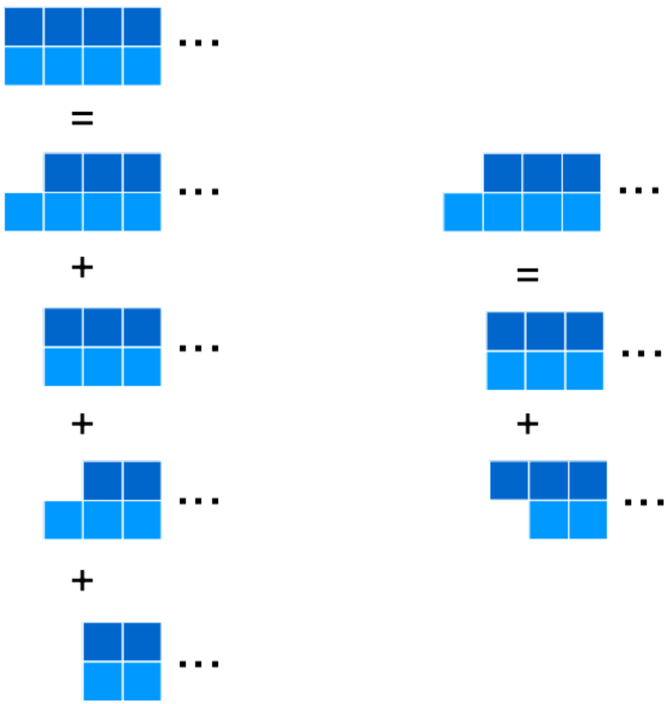
- $d^2 = 22^2 - (70v - x)^2$ **(I)**
  $d^2 = 20^2 - x^2$ **(II)**
  $d^2 = 28^2 - (80v + x)^2$ **(III)**
  $d^2 = D^2 - (210v + x)^2$ **(IV)**
- $84 = 70v(70v - 2x)$ **(I) – (II)**
  $384 = 80v(80v + 2x)$ **(III) – (II)**
  donnent $x = 4$ et $v = 1/5$ mille marin/seconde
- $d = 8\sqrt{6}$ d'après **(II)**
- À 23h40, D = **50** milles marins séparent le Titanic du Carpathia d'après **(IV)**



FFJM - 33e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 16 – Les pavages

- Soient respectivement U_{n+2} et V_{n+2} les pavages complets et amputés d'un coin du rectangle 2 x (n+2)
- $U_{n+2} = V_{n+2} + U_{n+1} + V_{n+1} + U_n$
- $V_{n+1} = U_n + V_n$
- En éliminant les U,
  $V_{n+3} = 3V_{n+2} + V_{n+1} - V_n$
- $V_1 = 1, V_2 = 3, V_3 = 10$
- $U_7 = V_8 - V_7 = 228V_3 + 49V_2 - 71V_1 =$ **2356**



Jour 1 – Problème 17 – La récupération des billes

- La probabilité que Jean récupère sa dernière bille avant que Bob récupère sa dernière bille est 4 / (4 + 5) = 4/9

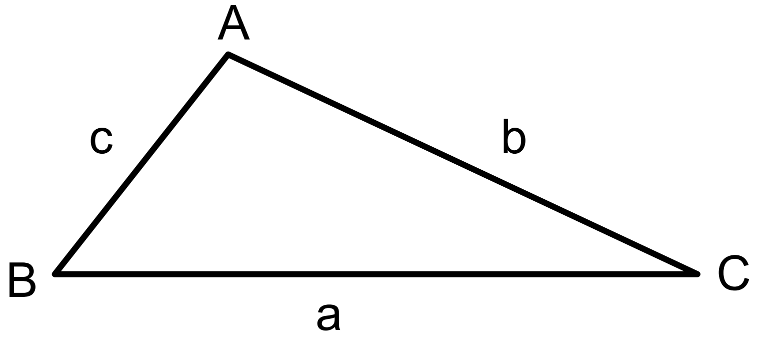
- La probabilité que Jean récupère sa dernière bille avant que Régine récupère sa dernière bille est 6 / (6 + 5) = 6/11

- La probabilité que Jean récupère sa dernière bille avant que Bob ou Régine récupère sa dernière bille est (4 + 6) / (4 + 6 + 5) = 2/3

- On applique le principe d'inclusion – exclusion

- La probabilité que Jean soit le premier qui récupère toutes ses billes est 4/9 + 6/11 – 2/3 = **32/99**

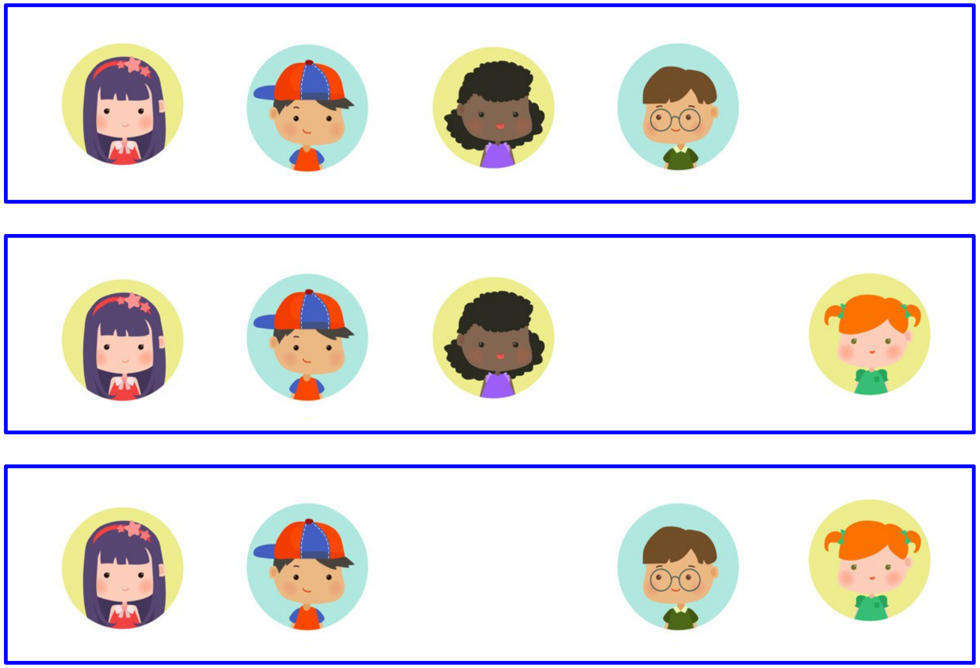
Jour 1 – Problème 18 – Le parc du Père Leduitre



- $b/c = \text{Sin}B/\text{Sin}C = 2\ \text{Cos}C$
- $a/c = \text{Sin}A/\text{Sin}C$
  $= \text{Sin}(180°\text{-}3C)/\text{Sin}C = 4\text{Cos}^2C – 1$
- En éliminant CosC, $b^2 = c(a + c)$
- $a = k(n^2 – m^2)$, $b = kmn$ et $c = km^2$
  où $n > m$ sont premiers entre eux (k est le PGCD de a et c)
  et où $\sqrt{3} < n/m$ ($= 2\ \text{Cos}C$) < 2 ($C < 30°$ car A est obtus)
- Comme $c = 100$, $(k,m,n) = (4,5,9)$ ou $(1,10,19)$
- Le périmètre du parc est $kn(n+m)$ = **504 ou 551 m**

Jour 2 – Problème 1 – Les photos

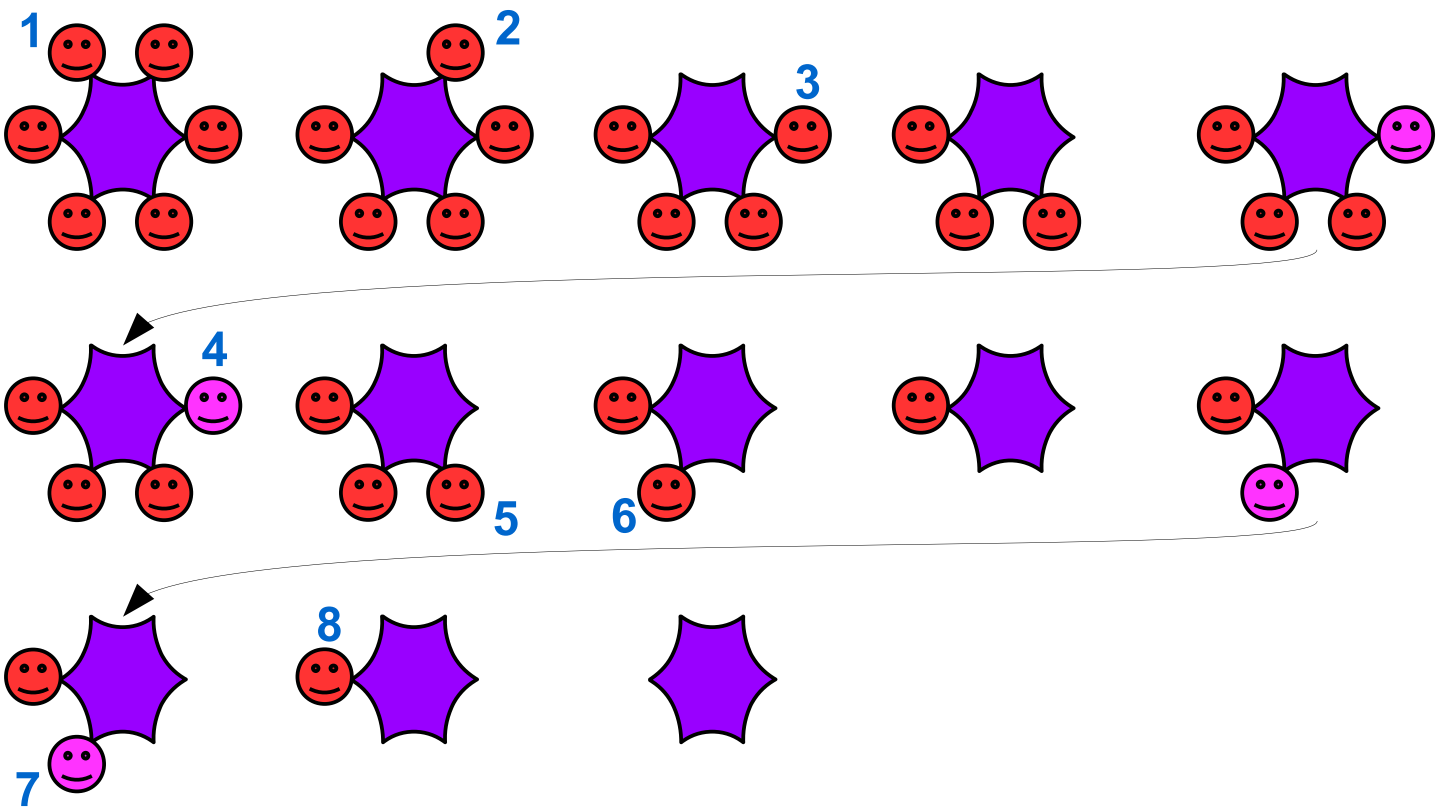
- Il y a au moins
  $5 \times 2 = 10$ photos d'enfant
- Il y a au plus
  $5 \times 3 = 15$ photos d'enfant
- 12 est le seul multiple de 4 entre 10 et 15
- Fifi a pris $12 / 4 =$ **3** photos



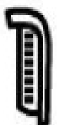
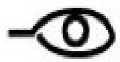
(par exemple)

Jour 2 – Problème 2 – Un travail herculéen

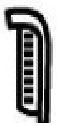
- Avant le combat, le monstre avait **6** têtes

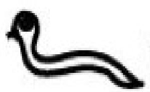


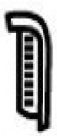
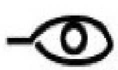
Jour 2 – Problème 3 – Le lion d'Égypte

- Si  = 2,  = 1 et  = 5,

   = 3 et  = 4

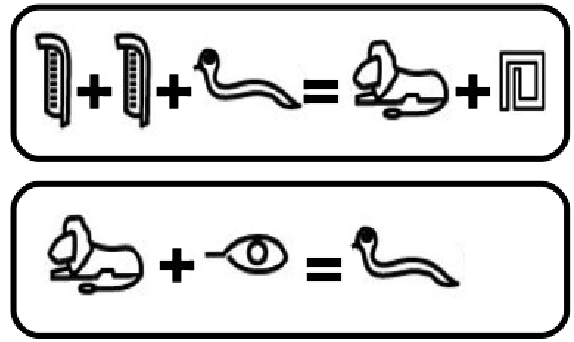
- Si  = 1,  = 2 et  = 4,

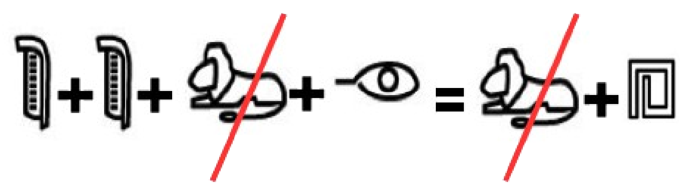
   = 3 et  = 5

- Si  = 1,  = 3 et  = 5,

  c'est impossible

- Le **3** est représenté par le lion



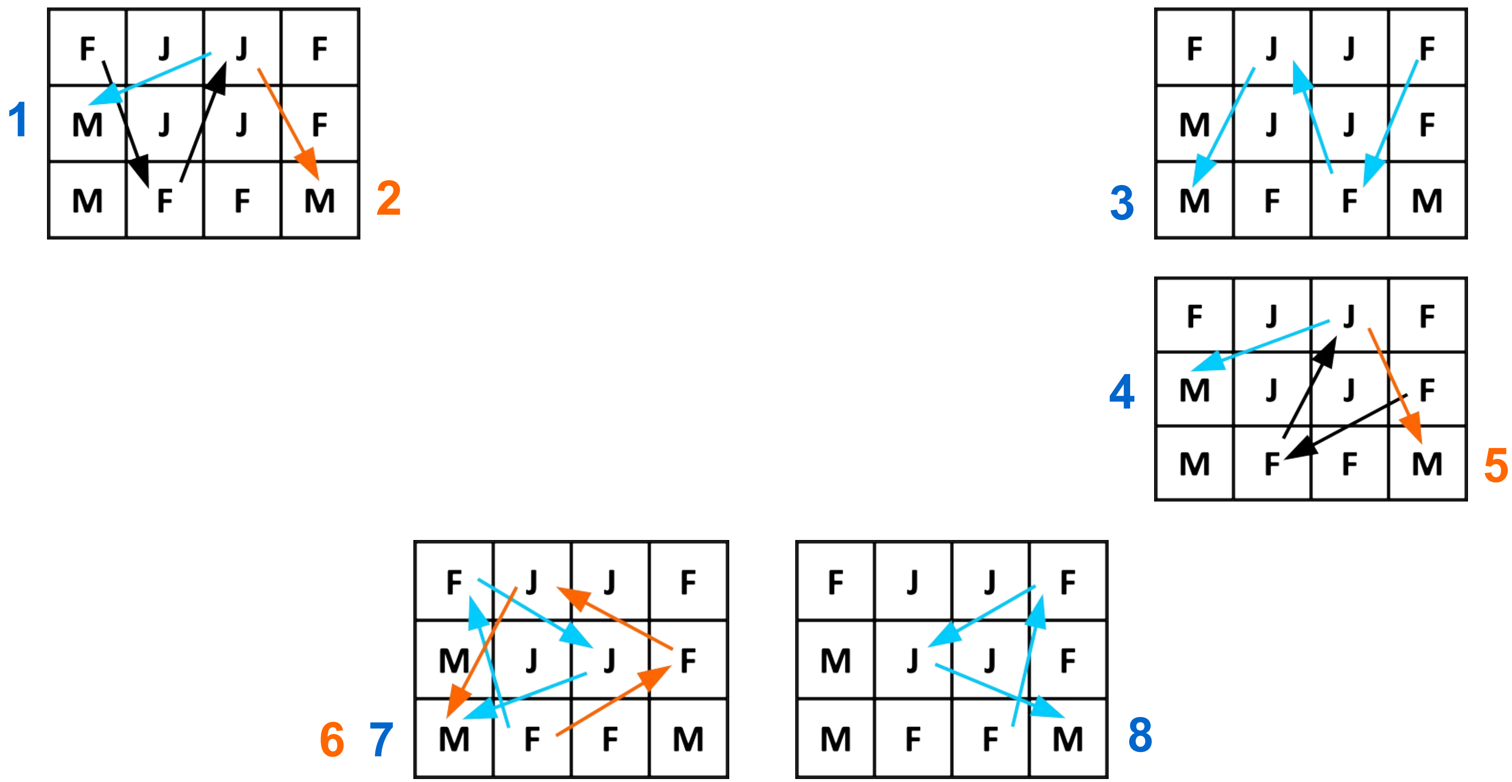


Jour 2 – Problème 4 – Les jours de soleil

- Il y a 31 - 29 = 2 jours sans soleil
- Sur 5 jours, on ne peut pas être sûr
- Il faut séjourner (au moins) **6 jours** à l'hôtel pour être sûr d'avoir 2 jours de soleil consécutifs

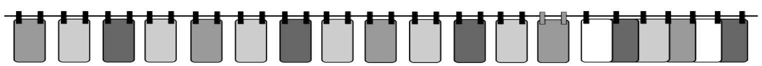
Jour 2 – Problème 5 – Le cavalier

- On peut lire FFJM de **8 façons**



Jour 2 – Problème 6 – Les serviettes

- Denise aurait pu s'en rendre compte dès le début car 2 x 19 = 38 > 33
- Soit S le nombre des serviettes restant à étendre
  Denise utilisera (S + 1) pinces à linge
  Elle a utilisé 33 – (S + 1) = (32 – S) pinces à linge
  Le nombre des serviettes déjà étendues est (32 – S)/2 = (16 – S/2)
- (16 – S/2) + S = 19 donne S/2 = 3 soit S = 6
- Il lui reste **6** serviettes à étendre

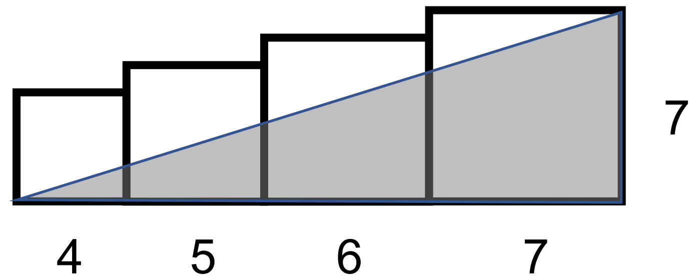


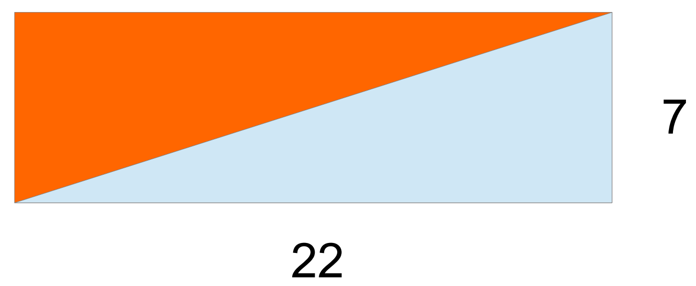
			Total
Serviettes	13	6	19
Pinces à linge	13 x 2 = 26	6 + 1 = 7	33

FFJM - 33e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 7 – L'escalier géant

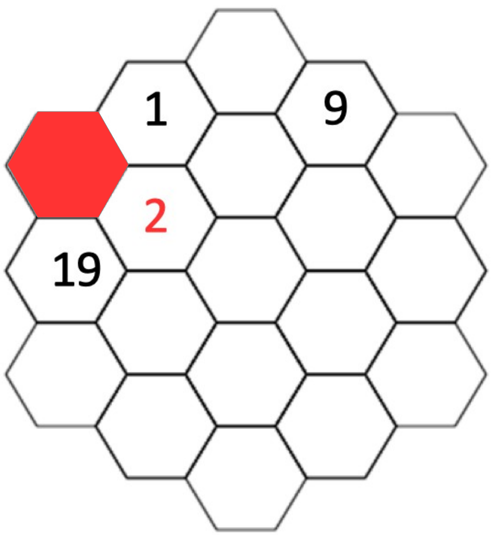
- Si le côté du carré le plus petit est 3 m, l'aire de l'ombre est (3+4+5+6) x 6 / 2 = 54 < 77 m^2
- Si le côté du carré le plus petit est 5 m, l'aire de l'ombre est (5+6+7+8) x 8 / 2 = 104 > 77 m^2
- Le côté du carré le plus petit est 4 m, l'aire de l'ombre est (4+5+6+7) x 7 / 2 = **77 m^2**

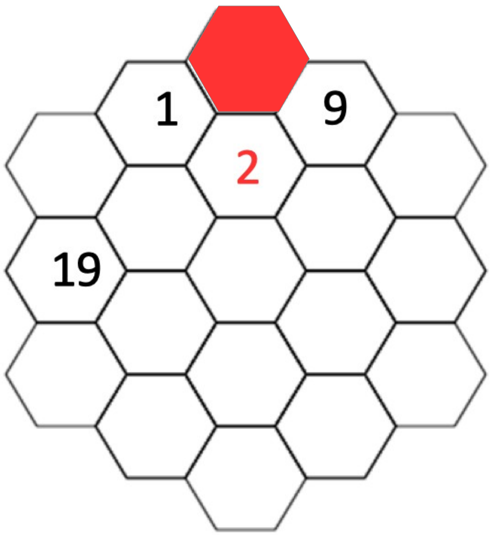


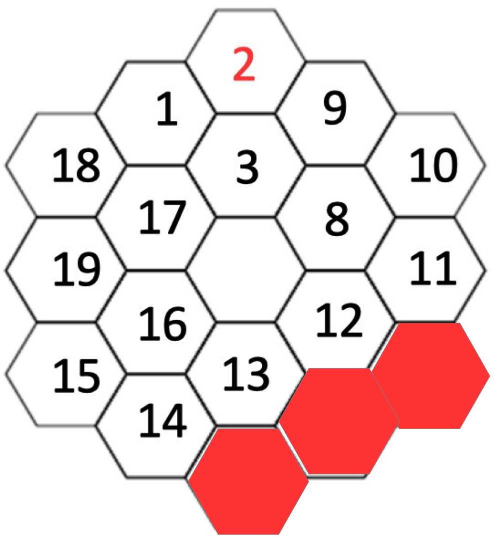


Jour 2 – Problème 8 – Maya fait son numéro

- Ces points de départ (nombre **2**) ne donnent rien, les cases rouges ne sont pas atteignables

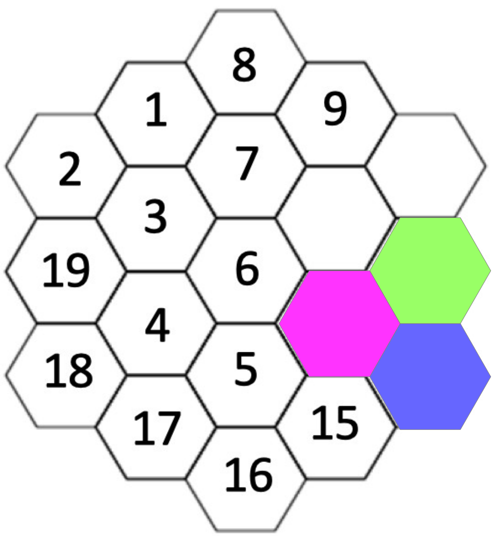


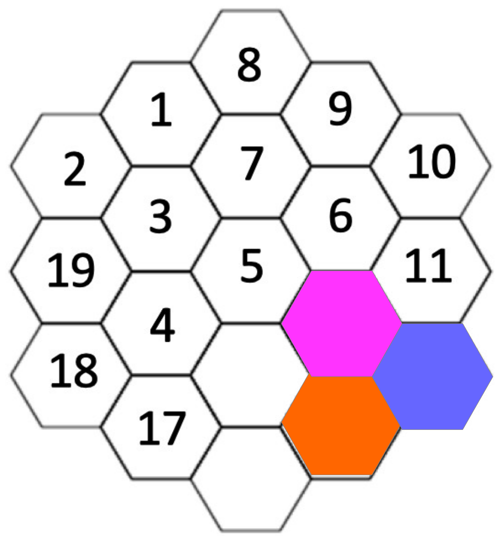


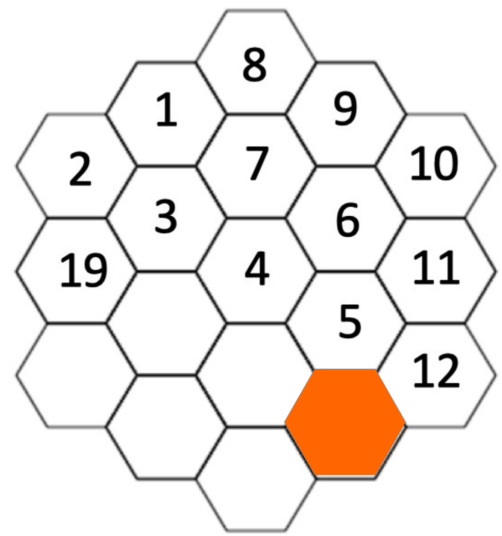


Jour 2 – Problème 8 – Maya fait son numéro

- Seule la case verte convient pour le 13,
  car les trois autres cases donnent chacune deux façons

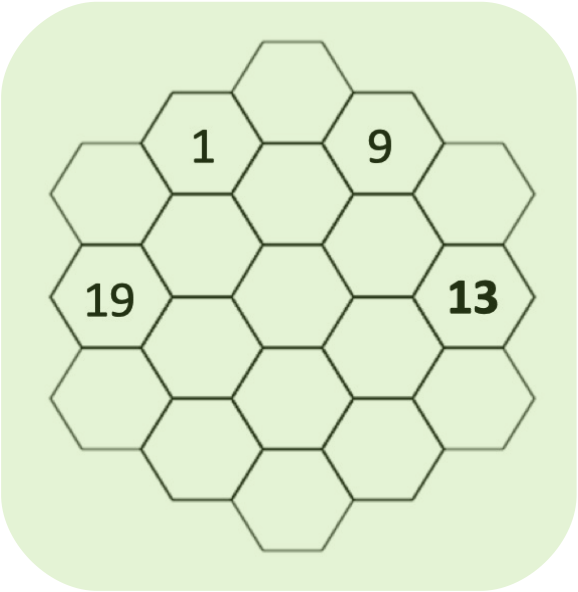


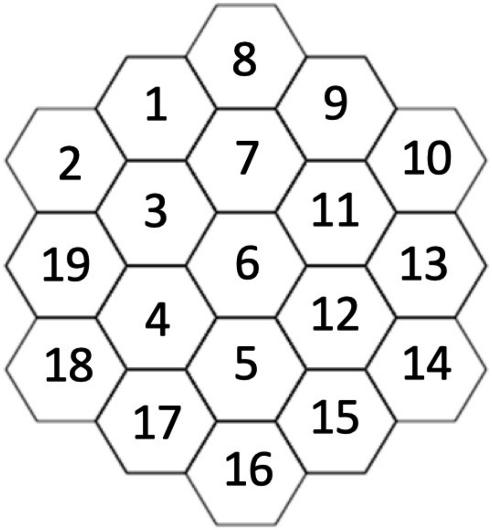




Jour 2 – Problème 8 – Maya fait son numéro

- Le 13 est écrit dans une (la seule) case
  de sorte qu'il y ait exactement une façon d'écrire les quinze nombres restants

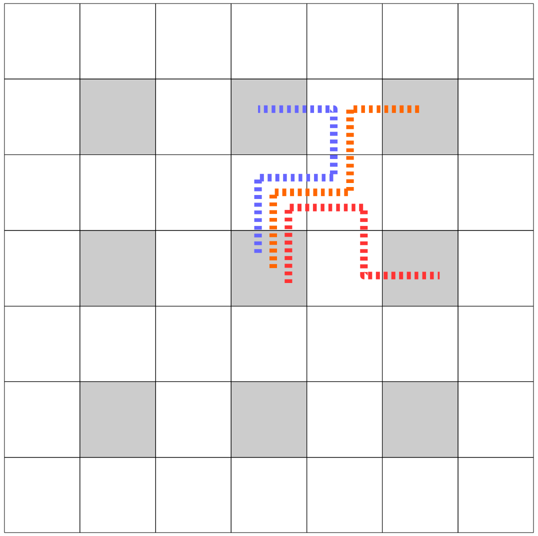




- *Note pour les plus grands : si l'on considère le bord en bas, par connexité, toute case isolée au-dessous du trajet 13-19 ne serait pas atteignable*

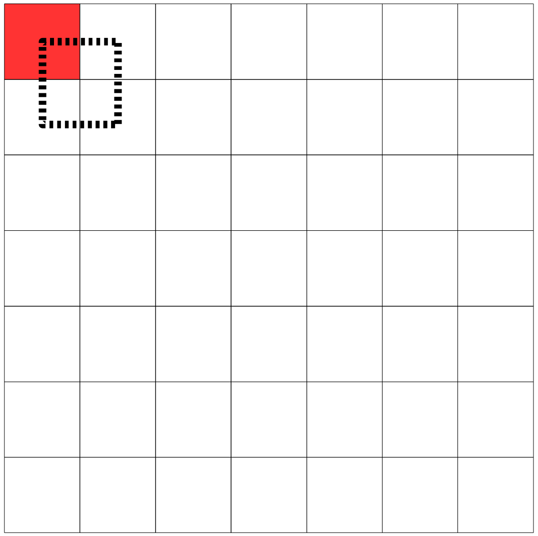
Jour 2 – Problème 9 – La tour saoule

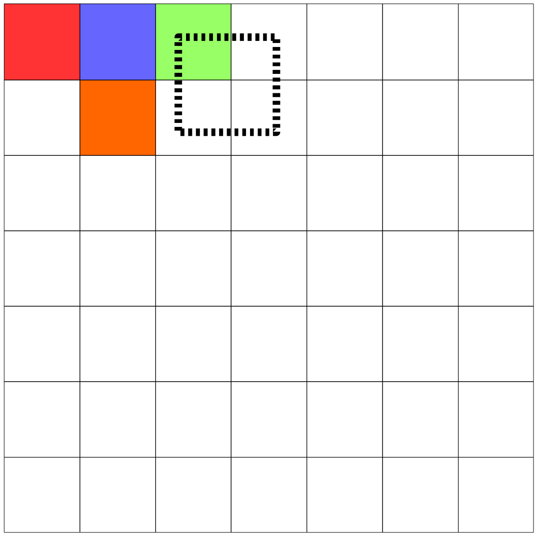
- En partant d'une case quelconque, au bout de quatre déplacements, la tour reste sur le même maillage horizontal / vertical de deux en deux (mêmes types de trajets en partant dans une autre direction ou après symétrie de l'orange par rapport à la diagonale montante)



Jour 2 – Problème 9 – La tour saoule

- La tour ne peut pas passer par la case rouge
- Si elle ne passe pas par la case orange,
  alors elle ne passe pas non plus par la case bleue ni par la case verte





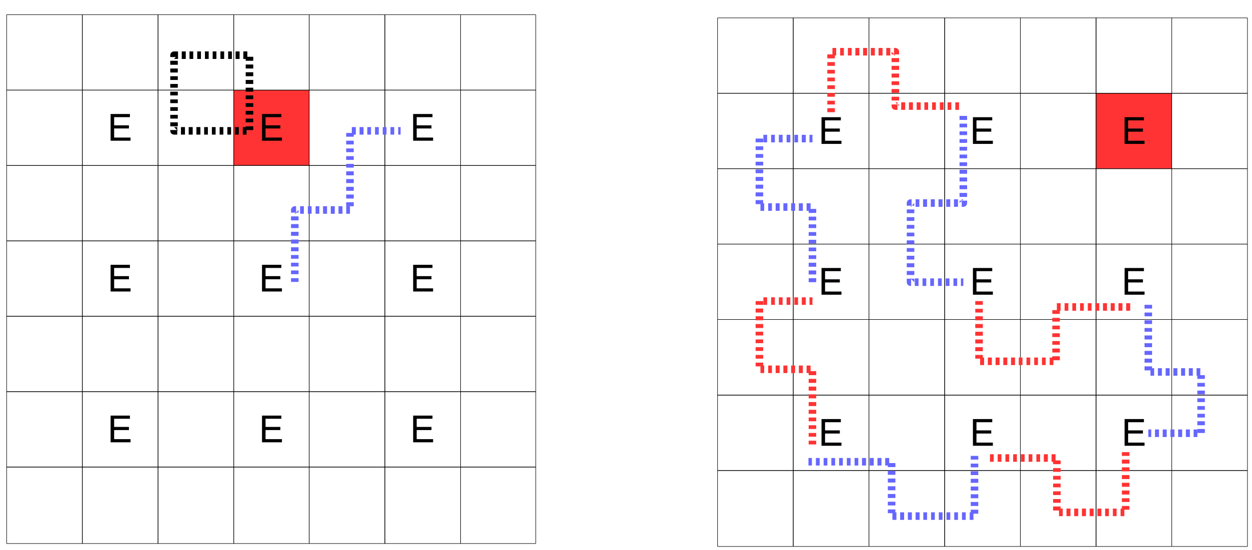
Jour 2 – Problème 9 – La tour saoule

- Si la tour ne passe par aucune case orange (voir la diapo précédente)
  - Elle reste sur un maillage qui compte (A ou B) 8, (C) 5 ou (D) 4 nœuds
  - Donc elle ne peut pas passer par plus de 8 noeuds

			A			
		B	C	B		
	A	D	A	D	A	
B	C	B	C	B	C	B
	A	D	A	D	A	
		B	C	B		
			A			

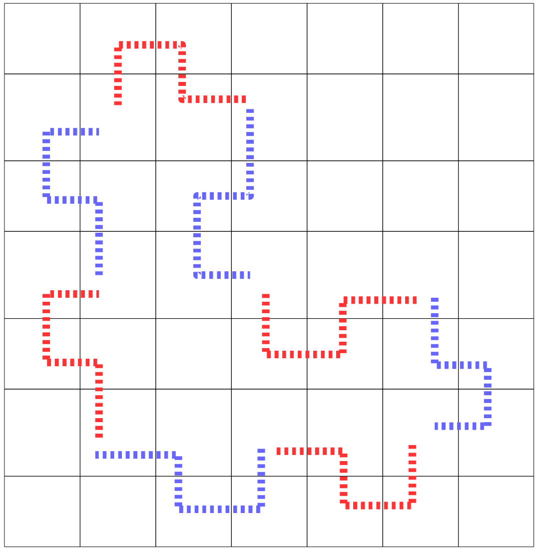
Jour 2 – Problème 9 – La tour saoule

- **Si** la tour passe par au moins une case orange et par les 9 nœuds du maillage E
  - Elle ne relie jamais, en quatre déplacements, le centre à un coin
  - Si elle relie, en quatre déplacements, le centre à deux milieux, alors elle ne passe pas par le coin correspondant



Jour 2 – Problème 9 – La tour saoule

- La tour peut passer au maximum par 8 nœuds du maillage, ce qui donne 8 x 4 = **32 cases**



(par exemple)

Jour 2 – Problème 10 – Les lingots

- Picsou possède au moins 10 lingots, car chacune des 5 piles de 12 kilos doit compter au moins 2 lingots pour la répartition en piles de 10
- S'il ne possède que 10 lingots
  - Il y a au moins 2 lingots de 10, sinon la répartition en 6 piles de 10 nécessiterait 11 lingots
  - Il y a au moins 4 lingots d'un nombre impair (I) de kilos pour la répartition en 4 piles de 15.
    Il y en a 6, sinon ils totaliseraient 2 x 12 = 24 pour la répartition en piles de 12,
    plus grand que 2 x 10 = 20
    pour la répartition en piles de 10.
  - D'où une contradiction (8 au lieu de 2)

12	12	12	12	12
10	10	I	I	I
2	2	I	I	I

15	15	15	15
I	I	I	I
I	X	X	X
I	?		
?			

10	10	10	10	10	10
I	I	I	2	10	10
I	I	I	8		

Jour 2 – Problème 10 – Les lingots

- Picsou possède au moins **11 lingots**

10	10	10	10	10	10
5	6	7	8	9	10
5	4	3	2	1	

12	12	12	12	12
6	7	8	9	10
5	5	4	3	2
1				

15	15	15	15
5	5	6	7
4	10	9	8
3			
2			
1			

Jour 2 – Problème 11 – Un, deux, trois

- Multipliée par (1 000 000 moins 1 001), la fraction donne 1 001
- 1 001, plus la fraction, plus 1 000 fois la fraction
  donne 1 000 000 fois la fraction

	1	0	0	1																		
+				0,	0	0	1	0	0	2	0	0	3	A	B	C	D	E	F	G	H	I
+				1,	0	0	2	0	0	3	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
=	1	0	0	2,	0	0	3	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	**O**

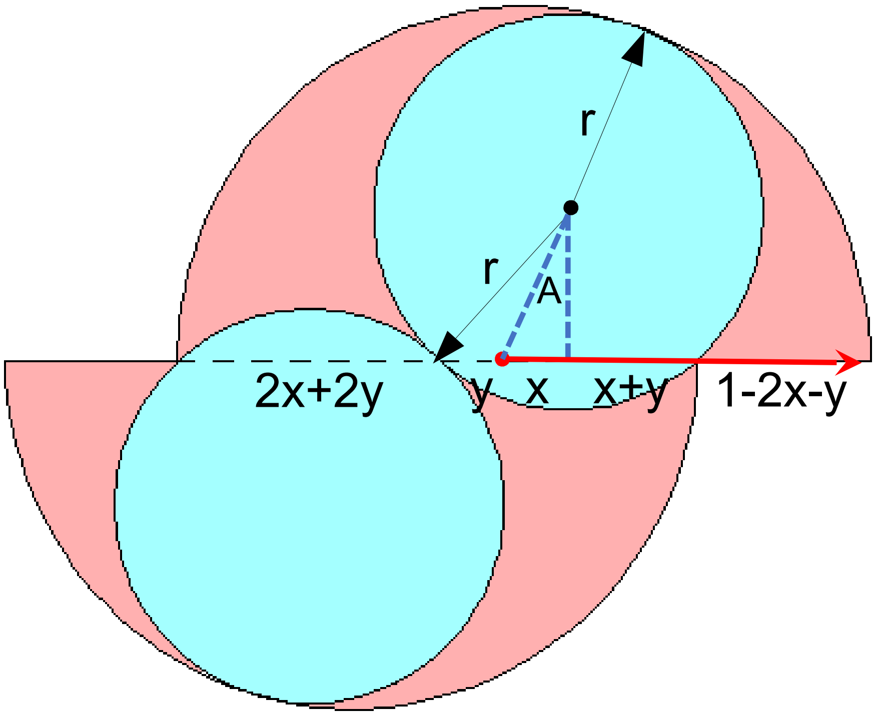
- ABC = 002 + 003 = 005, DEF = 003 + ABC = 008, GHI = ABC + DEF = 013,
  JKL = DEF + GHI = 021, MNO = GHI + JKL = 034
- O = 4 car il n'y a pas de retenue
- Le chiffre 4 apparaîtra pour la première fois au **rang 24**

Jour 2 – Problème 12 – Les restes

- Soient respectivement a, b et c les restes des divisions de N par 796, 1024 et 1358
- $N - c = a + b < 796 + 1024 = 1820$ est divisible par 1358, $a + b = 1358$
- $N - b = a + c < 796 + 1358 = 2154$ est divisible par 1024, $a + c = 2048$ ou 1024
- Si $a + c = 2048$, $2a + b + c = 1358 + 2048 = 3406 \equiv 222 \equiv 2a + (N - a) \equiv 2a$ [796]
  $a = 111$ puis $b = 1247 > 1024$ ou $a = 509$, $b = 849$ puis $c = 1539 > 1358$
- $a + c = 1024$, $2a + b + c = 1358 + 1024 = 2382 \equiv 790 \equiv 2a + (N - a) \equiv 2a$ [796]
  - $a = 395$, $b = 1358 - 395 = 963$ et $N = 1024 + 963 = 1987$ ($c = 629$)
  - Ou $a = 793$, $b = 1358 - 793 = 565$ et $N = 1024 + 565 = 1589$ ($c = 231$)
- Le nombre est **1589 ou 1987**

Jour 2 – Problème 13 – La trancheuse de jambon

- On multipliera par 224 à la fin
- $2x + 3y = 1$ soit $x + y = (x + 1)/3$ **(I)**
- $1 - r = x/\mathrm{Sin}A$ donc
  $(x\mathrm{Cos}A/\mathrm{Sin}A)^2 = (1 - r)^2 - x^2$ **(II)**
- $(x + y)^2 + (x\mathrm{Cos}A/\mathrm{Sin}A)^2 = r^2$
- D'après **(I)** et **(II)**
  $(x + 1)^2/9 + (1 - r)^2 - x^2 = r^2$
  soit $r = 9/16 - 4(x - 1/8)^2/9$
- Au maximum, $x = 1/8$
- Le rayon est au plus
  $224 \times 9/16 =$ **126 mm**



Jour 2 – Problème 14 – Une formule tamoule

- Soient respectivement a et b les grand et petit côtés de l'angle droit
- $a^2 + b^2 = (7a/8 + b/2)^2$ d'après Pythagore
- $48b^2 - 56ab + 15a^2 = 0$
- $a = 4a'$
- $3b^2 - 14a'b + 15a'^2 = 0$
    - $b = 5a'/3$, $a' = 3a''$ et l'hypoténuse est $13a''$ (triangle homothétique du 5 12 13)
    - Ou $b = 3a'$ et l'hypoténuse est $5a'$ (triangle homothétique du 3 4 5)
- L'hypoténuse est un multiple de 65
- L'hypoténuse est **65 ou 130**

Jour 2 – Problème 15 – Les nombres autonomes

- Les nombres cherchés sont de la forme $a_1\ 1\ a_2\ b_2\ \dots\ a_{N-1}\ b_{N-1}\ 1\ b_N$ où
  - $a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + 1 = 2N$ est le nombre de chiffres
  - b_N est impair
  - $1 + b_2 + \dots + b_{N-1} + b_N = 2N + 11k$
  - $4N + 11k$ soit $2N + k \neq 9k'$
- L'énoncé indique qu'il est inutile de chercher avant N = 4.
- Si N = 4
  - 2132231X ou 3112331X : 6 + X ≠ 2N + 11k lorsque X = 5, 7 ou 9
  - 31331X1Y : 4 + X + Y = 2N + 11k lorsque (X,Y,k) = (6,9,1), mais 2N + k = 9
- Si N = 5, 3122331X1Y : 6 + X + Y = 10 + 11k lorsque (X, Y) = (6,9) et 2N + k = 11 ≠ 9k'
  On continue pour vérifier que **3122331619** est la seule solution

Jour 2 – Problème 15 – Les nombres autonomes

- Si $N = 6$, il n'y a aucun nombre à tester
- Si $N = 7$, 413223241X1Y1Z : $10 + X + Y + Z \neq 14 + 11k$ lorsque $5 \leq X < Y < Z \leq 9$
- Si $N = 8$
  - 51322314251X1Y1Z : $15 + X + Y + Z = 16 + 11k$ lorsque $(X,Y,Z,k) = (6,8,9,2)$, mais $2N + k = 18$
  - 5132232516171819 : $41 \neq 16 + 11k$
- Si $N = 9$, 613223141526171819, donné par l'énoncé : $45 \neq 18 + 11k$

Jour 2 – Problème 16 – Six produits serrés

- Soit P le produit le plus grand.
- $9! = (72/71) \times (70\times71\times72) > (70\times71\times72)$ donc $P \geq 73$.
- Si $P \geq 105$, le score est $> 105/\sqrt{9!/105} = 35/(8\sqrt{6}) > 35/(8\times(5/2)) = 7/4 > 5/3$

- Si P = 73, 74, 76 … 79, 82, 83, 85 … 89, 91 … 95, 97, 99, 101 … 104,
  9! serait divisible par un nombre premier supérieur à 7.
- Si P = 75 ou 100, 9! serait divisible par 5^2
- Si P = 98, 9! serait divisible par 7^2
- Si P = 81, P serait divisible par 3^4, P vaudrait $3 \times 6 \times 9 = 162 > P$.

- Si le score est au plus 5/3, P vaut 80, 84, 90 ou 96.

Jour 2 – Problème 16 – Six produits serrés

- Si P = 80, il y aurait 1 x 7 x 9 = 63 et 3 x 4 x 6 = 72,
  puis au moins 5 x 7 x 3 = 105 > P dans l'autre direction

- Si P = 84, il y aurait 1 x 8 x 9 = 72 et 60,
  puis au moins 3 x 8 x 5 = 120 > P dans l'autre direction

1	6	9	54
7	3	4	84
8	5	2	80
56	90	72	

- Si P = 90, le tableau ci-contre
  donne un exemple où le score est 5/3.
  Sinon, si le score était strictement inférieur à 5/3,
  le plus petit produit du tableau serait strictement supérieur à 54.
  Or l'un des deux produits contenant le 1 est au plus 54,
  car 3024 < 3025 donc $\sqrt{(1^2 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9)} = 12\sqrt{21} < 55$.

- Si P = 96, le plus petit produit du tableau serait au moins 57,6 > 55.

- Le score minimum est 90/54 = **5/3**

Jour 2 – Problème 17 – Les îles du lac

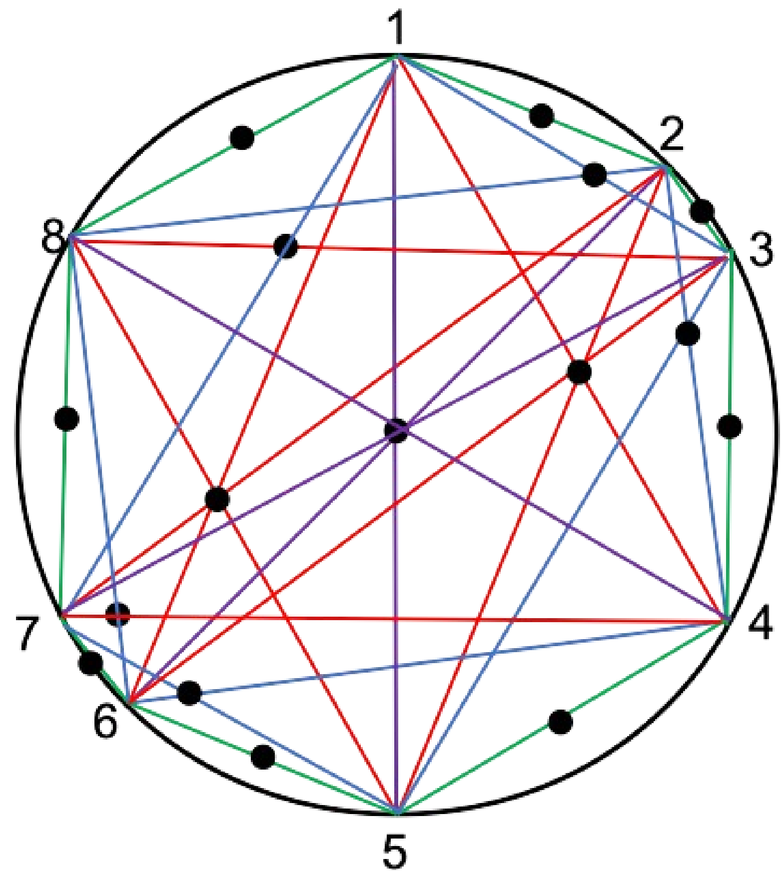
- Numérotons les points d'observation i de 1 à 8
  en tournant autour du lac modulo 8 (par exemple, $5 + 4 \equiv 1$)
- Pour chaque écart j, où $1 \leq j \leq 4$,
  la corde qui joint le point i au point i + j coupe le lac en deux.
  Le nombre des points sur l'arc où l'on en compte le moins,
  ou autant de part et d'autre,
  donne une minoration du nombre des paires de points
  qui ne se voient pas à cause d'une île sur cette corde
- Le nombre des îles nécessaires pour que deux points séparés par j – 1 points ne se voient pas est 8/j lorsque $j \neq 4$, et 1 (le centre) lorsque $j = 4$
- $8(1/1 + ½ + 1/3) + 1 \approx 15{,}7$ donc le plus petit nombre d'îles à tester est 16

Jour 2 – Problème 17 – Les îles du lac

- Une île est au centre,
  huit sur chaque corde i i+1,
  trois en 13 ∧ 82, 24 ∧ 35 et 46 ∧ 57,
  deux en 14 ∧ 25 ∧ 36 et 58 ∧ 61 ∧ 72,
  deux en 47 ∧ 68 et 71 ∧ 83

- 6 est diamétralement opposé à 2.
  Lorsque 2 va vers 1, 14 ∧ 25 va vers 1
  et 14 ∧ 36 va vers 14 ∧ 35 fixe.
  Lorsque 2 va vers 3,
  14 ∧ 25 va vers 14 ∧ 35 fixe
  et 14 ∧ 36 va vers 14 ∧ 37 fixe.
  D'après l'argument de continuité,
  14 ∧ 25 ∧ 36 est possible
  (58 ∧ 61 ∧ 72 idem)

- Le nombre d'îles est au minimum **16**



Jour 2 – Problème 18 – Hacker vaillant, rien d'impossible

- La matrice M contient 1 dans une case si, et seulement si, on peut juxtaposer les sommets de la ligne et de la colonne correspondantes. Sinon, elle contient 0.

- Soient I la matrice identité,
  J celle avec des 1 sur la diagonale montante,
  U celle avec des 1 partout.
  $J^2 = I$, $U^2 = 4U$, $J\,U = U\,J = U$, $M = U - J$ (en binaire).

- Le nombre des codes est la trace de la matrice M^N.

	0B	0R	1B	1R
0B	1	1	1	0
0R	1	1	0	1
1B	1	0	1	1
1R	0	1	1	1

- $M^2 = 2\,U + I$, $M^3 = 7\,U - J$, $M^4 = 20\,U + I$, $M^5 = 61\,U - J$ et $M^6 = 182\,U + I$.
  Pour N = 3, on retrouve 4 x 7 = 28.
  Pour N = 6, on trouve 4 x 182 + 4 x 1 = 732

- Le programme informatique du hacker met au maximum **12 minutes 12 secondes** pour gagner