

Solution du problème n. 17 de la finale internationale 2002 Séance 1

On suppose que la formule magique commence par le bloc AB.

La séquence de l'apprentie, identique, commence également par AB.

On décode la séquence de l'apprentie, avec $A=AB$ et $B=BA$; on trouve :

ABBA, les premières 4 lettres de la formule.

On continue le décodage, on trouve progressivement :

ABBA BAAB, les premières 8 lettres.

ABBA BAAB BAAB ABBA, les premières 16 lettres.

ABBA BAAB BAAB ABBA BAAB ABBA ABBA BAAB, les premières 32 lettres.

Ainsi de suite, mais trop long pour arriver à la 2002^{me} lettre !

On imagine un 2^{me} apprentie qui copie le séquence du premier avec le même codage. Il obtient la même formule, mais $A=ABBA$ et $B=BAAB$ par rapport à la formule d'origine.

Ainsi de suite, A peut coder pour une séquence identique au premier bloc de 2, 4, 8, 16....

lettres et B peut coder pour une séquence identique au deuxième bloc de 2, 4, 8, 16.... lettres.

On remarque que toujours un bloc B est exactement le contraire du bloc A, avec A qui remplace B et B qui remplace A. On remarque aussi que la première moitié de chaque bloc est identique au bloc de niveau inférieur.

Considérons la séquence où A et B ont codé des blocs de 64 lettres : un peu d'arithmétique nous dit que la 2002^{me} lettre se trouve à la 18^{me} position du 32^{me} bloc ($2002=64 \times 31 + 18$).

La séquence plus haut nous dit que le 32^{me} bloc est un bloc B, soit :

BAAB ABBA ABBA BAAB **ABBA BAAB**

La 18^{me} (2002^{me}) lettre est B ; les suivantes, jusqu'à la 2008^{me}, B,A,B,A,A,B.

Si la formule magique commence par le bloc BA, la solution est A,A,B,A,B,B,A.

Fausto Giori

Avril 2005