

## 18 - L'ÉTANG D'ARES (quarts de finale du 17<sup>ème</sup> championnat 2002-2003)

Solution proposée en 3 étapes :

### 1. Chercher les groupes de 4 nombres qui satisfont les conditions données

Les nombres d'un même groupe sont tels que la différence de leurs carrés est un multiple de 100. Soit  $a$  et  $b$ , deux de ces nombres, alors

$$a^2 - b^2 = x \times 100 \Rightarrow (a + b)(a - b) = x \times 100$$

Si  $b$  est défini, on a les possibilités suivantes pour  $a$  :

$$(a + b) = 100$$

$$(a + b) = 50 \text{ et } (a - b) \text{ est pair}$$

$$(a - b) = 50 \text{ et } (a + b) \text{ est pair}$$

On obtient ainsi les groupes suivants :

1, 49, 51, 99

2, 48, 52, 98

3, 47, 53, 97

4, 46, 54, 96

.

.

.

21, 29, 71, 79

22, 28, 72, 78

23, 27, 73, 77

24, 26, 74, 76

### 2. Déterminer quel groupe permet de construire le quadrilatère ayant la plus grande surface.

On notera que tous les quadrilatères ont un périmètre égale à 200. A périmètre égal, le carré a la plus grande surface ou à défaut le quadrilatère qui s'approche le plus du carré.

Dans le cas présent, le groupe 24, 26, 74, 76.

### 3. Déterminer la surface maximale du quadrilatère

En construisant le quadrilatère de dimension 24, 26, 74 et 76, on remarque qu'il peut prendre différentes formes. Il a une aire maximale quand il est inscrit dans un cercle.

La surface d'un quadrilatère inscrit (abcd) peut s'écrire :

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

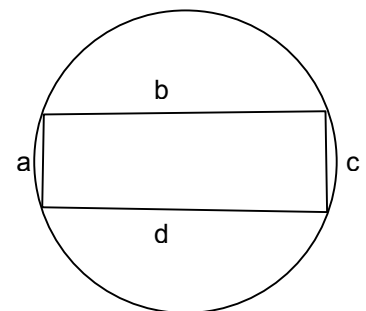
$$\text{ou } 2p = a + b + c + d$$

Ce qui donne pour les groupes de nombres trouvés :

$$A = \sqrt{a \times b \times c \times d}$$

Soit pour le quadrilatère de plus grande surface:

$$A = \sqrt{24 \times 26 \times 74 \times 76} = 1873,332859$$



Solution proposée par Pierre-André Roubaty, 25 février 2005