

Calcul préliminaire :

$$w = \exp(2i\pi/5) \text{ et } c = \cos(2\pi/5)$$

$$w^5 = 1 \text{ implique que } 1+w+w^2+w^3+w^4 = 0$$

Quelques rappels :

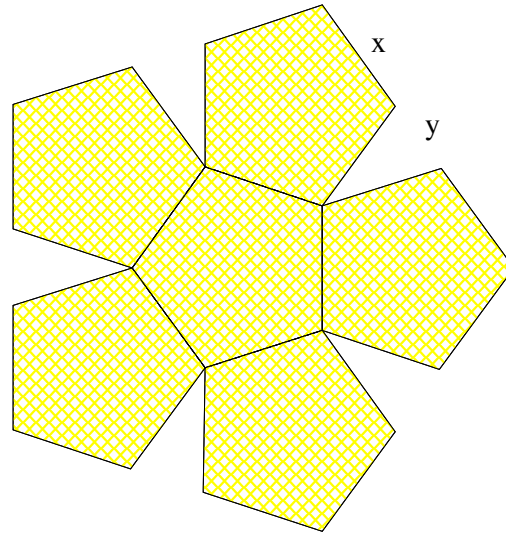
$$\cos(2\pi - a) = \cos(a)$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\text{D'où } 1+2c+2(2c^2-1) = 0.$$

$$\text{Soit } 4c^2+2c-1=0.$$

$$\text{Compte tenu que } c>0, c = (-1+\sqrt{5})/4.$$



Retour à l'énoncé :

$$\sin(\pi/10) = y/2x = \cos(\pi/2 - \pi/10) = c.$$

$$\text{D'où } y/x = 2c = (\sqrt{5}-1)/2 = t \text{ (nombre d'or vérifiant l'équation } 1/t = 1+t).$$

Notons à l'étape k , $A(k)$ l'aire en cm^2 du napperon.

Ce dernier est formé de 6^k pentagones réguliers d'aire en cm^2 $P(k)$.

Chaque étape génère de nouveaux pentagones réguliers plus petits, dans un rapport de longueur de $x/(2x+y) = 1/(2+t) = t^2$, donc dans un rapport d'aire de t^4 .

Au départ, nous avons $A(0) = P(0)$.

$$\text{Ensuite à l'étape } k, A(k) = 6^k P(k) = 6 \cdot t^4 A(k-1) = 6^k t^{4k} A(0).$$

$$\text{Nous avons donc } A(5) = 100 = 6^5 t^{20} A(0).$$

$$\text{Par conséquent, } A(0) = 100 \cdot t^{-20} / 6^5 = 25 \cdot t^{-20} / 1944.$$

Pour calculer t^{-20} , nous allons utiliser la suite de Fibonacci (d'où le titre de l'énoncé)

Pour $k \geq 1$, définissons u_k et v_k telles que $t^{-k} = u_k + v_k t$.

$$t^{-1} = 1 + t, \text{ d'où } u_1 = 1, v_1 = 1.$$

$$t^{-(k+1)} = (1+t)(u_k + v_k t) = u_k + v_k + u_k t + v_k t^2$$

$$\text{D'où } u_{k+1} = u_k + v_k \text{ et } v_{k+1} = u_k + v_k t$$

Si nous posons $f_k = v_k$, alors nous retrouvons la suite de Fibonacci définie par :

$$f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \text{ avec } f_1 = f_2 = 1.$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946

$$t^{-20} = f_{21} + f_{20} t = 10946 + 6765 t$$

Avec l'approximation $\sqrt{5} \approx 2,236$, $t \approx 0,618$.

$$t^{-20} \approx 10946 + 4181 = 15127.$$

$$A(0) \approx 15127 \cdot 25 / 1944 = 378175 / 1944 \approx 194,53 \dots \approx 195 \text{ cm}^2.$$