

Réponse à Wanted Recherche N° 8 Les napperons de Fibo

Après chaque découpage, le côté d'un pentagone est divisé par $2(1 + \cos 72^\circ)$ ou $[2 \cos 36^\circ]^2$, donc sa surface par $[2 \cos 36^\circ]^4$;
et le nombre de pentagones est multiplié par 6.
En cm^2 , la solution est $100 [2 \cos 36^\circ]^{20} / 6^5$.
 $2 \cos 36^\circ$ est le nombre d'or Φ solution de $\Phi^2 = \Phi + 1$ (que l'on peut retrouver à partir de $\cos 72^\circ + \cos 108^\circ = 0$).
En observant que $\Phi^3 = 2\Phi + 1$, $\Phi^4 = 3\Phi + 2$, ... on retrouve comme coefficients les nombres de Fibonacci satisfaisant à $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ à partir de $F_2 = F_1 = 1$.
 $\Phi^{20} = F_{20}\Phi + F_{19}$ soit environ $F_{21} + F_{19} = 10946 + 4181 = 15127$ (calculé de proche en proche).
La solution est $100 \times 15127 / 7776$ soit environ 195 cm^2 .

Jean-Louis Legrand (26 mai 2005)

Les napperons de Fibo :

Tracer les diagonales du pentagone régulier donne, au milieu, un petit pentagone qui est l'une des 6 pièces de la décomposition. Il suffit donc de trouver le rapport (linéaire) de réduction K .
En regardant une diagonale, on constate que
 $\text{diagonale}(\text{grand}) = 2 \times \text{diagonale}(\text{petit}) + \text{côté}(\text{petit})$. D'où
 $K = 2 + \text{côté}/\text{diagonale} = 2 + (\sqrt{5}-1)/2 = 2,618...$ (O section d'or, O Fibonacci !).
Le facteur de réduction en surface est donc $K^2/6$ et la réponse cherchée est alors
$$((7 + 3 * \sqrt{5})/12)^5 = 1,9453... \text{ dm}^2 = 195 \text{ cm}^2$$

François Sigrist (28 mai 2005)