17ème championnat FFJM - Finale internationale du 29 août 2003
Problème n° 17 - Les napperons de Fibo

Solution proposée en 3 étapes :

1 Relation entre l'aire du pentagone initial et celle du napperon après les 5 étapes

Le napperon de départ est un pentagone régulier de côté c_0 et d'apothème ρ_0, avec la relation : $½\cdot c_0 = \rho_0 \cdot \tan(\pi/5)$. L'aire A_0 du pentagone est donc :

$A_0 = 5/2 \cdot c_0 \cdot \rho_0$ (1)

Dans la première étape, Fibo enlève 5 triangles et obtient une figure composée de 6 pentagones réguliers identiques de côté c_1 et apothème ρ_1. L'aire de cette surface est :

$A_1 = 6 \cdot 5/2 \cdot c_1 \cdot \rho_1$

Après la deuxième étape, on obtient une figure composée de 6^2 pentagones réguliers identiques de côté c_2 et apothème ρ_2 ; aire de cette surface : $A_2 = 6^2 \cdot 5/2 \cdot c_2 \cdot \rho_2$

Etc. ...

Finalement, après la cinquième étape, la figure obtenue est composée de 6^5 pentagones réguliers identiques de côté c_5 et apothème ρ_5 ; l'aire A_5 de cette surface est donc :

$A_5 = 6^5 \cdot 5/2 \cdot c_5 \cdot \rho_5$ (2)

Par construction, le rapport entre les dimensions des pentagones de « génération i » et ceux de la « génération i+1 » est un facteur de proportionnalité constant k :

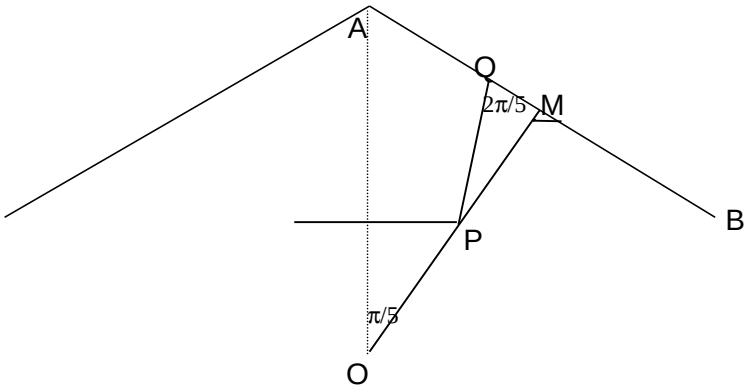
$c_0 = k \cdot c_1$ $c_1 = k \cdot c_2$ ... $c_0 = k^5 \cdot c_5$ et de même : $\rho_0 = k^5 \cdot \rho_5$

L'équation (1) devient alors : $A_0 = 5/2 \cdot k^5 \cdot c_5 \cdot k^5 \cdot \rho_5 = 5/2 \cdot k^{10} \cdot c_5 \cdot \rho_5$

En comparant avec l'équation (2), on obtient alors :

$$\boxed{A_0 = (1/6)^5 \cdot k^{10} \cdot A_5} \quad (3)$$

2 Calcul du facteur de proportionnalité k



AB = c_i = côté du pentagone de génération i ;
OA = r_i = rayon du cercle circonscrit au pentagone de génération i ;
OM = ρ_i = apothème du pentagone de génération i = rayon du cercle inscrit au pentagone

PQ = c_{i+1} = côté du pentagone de génération i+1 ;
OP = r_{i+1} = rayon du cercle circonscrit au pentagone de génération i+1 ;

Pour fixer les idées, et sans limitation de la généralité, nous posons i=0. On a :

$OM = \rho_0 = \frac{1}{2}\cdot c_0 / \tan(\pi/5)$ $\qquad$ $OP = r_1 = \frac{1}{2}\cdot c_1 / \sin(\pi/5)$

$PM = \sin(2\pi/5)\cdot c_1 = 2\cdot\sin(\pi/5)\cdot\cos(\pi/5)\cdot c_1$

$OM = OP + PM \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot c_0 / \tan(\pi/5) = \frac{1}{2}\cdot c_1 / \sin(\pi/5) + c_1\cdot 2\cdot\sin(\pi/5)\cdot\cos(\pi/5)$

$\rightarrow \quad k = c_0/c_1 = 1 / \cos(\pi/5) + 4\cdot\sin^2(\pi/5)$

soit : $\boxed{k = 1 / \cos(\pi/5) + 4\cdot(1 - \cos^2(\pi/5))}$ (4)

Pour calculer $\cos(\pi/5)$, on se souvient avec Euclide que les diagonales issues de deux sommets consécutifs du pentagone régulier se coupent en moyenne et extrême raison, avec le côté du pentagone comme plus grand segment partiel. Entre la diagonale d et le côté c du pentagone régulier on a donc la relation : $d = \phi\cdot c$, où ϕ est le nombre d'or : $\phi = \frac{1}{2}\cdot(5^{\frac{1}{2}} + 1)$, avec par définition : $\phi^2 = \phi + 1$.

Considérons maintenant le triangle isocèle formé de deux côtés du pentagone régulier et de la diagonale qui rejoint les extrémités de ces côtés. L'angle à la base de ce triangle est bien égal à $\pi/5$; on en conclut :

$\cos(\pi/5) = \frac{1}{2}\cdot d / c = \frac{1}{2}\cdot\phi$.

En remplaçant cette égalité dans l'équation (4), nous obtenons finalement :

$\boxed{k = \phi + 1}$ (5) ou $\boxed{k = \frac{1}{2}\cdot(5^{\frac{1}{2}} + 3)}$

3 Calcul numérique

Nous devons calculer $k^{10} = (\phi + 1)^{10}$, sans calculatrice.

Pour ce faire, nous utilisons le lien intrinsèque qui existe entre le nombre d'or ϕ et les nombres F_n de la suite de Fibonacci (définis récursivement par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$).

Pour $n > 0$, on a en effet l'identité (que l'on démontre aisément par récurrence):

$\phi^n = F_n \cdot \phi + F_{n-1}$

On sait d'autre part que le rapport F_{n+1} / F_n converge rapidement vers ϕ lorsque $n \to \infty$.

Donc :

$k^{10} = (\phi + 1)^{10} = \phi^{20} = F_{20} \cdot \phi + F_{19} \cong F_{21} + F_{19}$

Le calcul des F_n successifs ne fait intervenir que l'addition, et on calcule sans difficulté à la main :

$F_{19} = 4'181$, $F_{20} = 6'765$ et $F_{21} = 10'946$.

Donc :

$k^{10} \cong F_{21} + F_{19} = 15'127$.

Finalement :

$A_0 = (1/6)^5 \cdot k^{10} \cdot A_5 \cong 1/7'776 \cdot 15'127 \cdot 100\ [cm^2] = 194.53\ [cm^2]$,

soit, arrondi au cm^2 le plus proche :

$A_0 = 195\ [cm^2]$.

Remarque finale

Voir le site internet MathWorld pour les propriétés fractales de la surface abordée dans ce problème :

Eric W. Weisstein. «Pentaflake» From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Pentaflake.html

Solution proposée par Jean-Luc Vuarnoz,
23 mai 2005.