

Explication pour le problème No 15 de la 2^{ème} épreuve de la finale 2004 à Paris :
"LES GRANDS-PERES" :

A chaque enfant on peut associer une paire $\{a,b\}$ qui représente ses deux grands-pères (attention, a est toujours différent de b). Le problème dit que deux enfants ont au moins un élément de leurs paires respectives en commun. On se convainc vite qu'il n'existe que deux configurations possibles:

- 1) ou bien toutes les paires ont le même élément en commun, qu'on note a par exemple
- 2) ou bien il n'existe que trois paires, de la forme $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,a\}$

Attention, chaque paire peut renvoyer à plusieurs enfants! (des frères et soeurs)

Supposons qu'on soit dans la configuration 1). Alors il existe 12 enfants exactement (s'il en existait 13 ou plus, ils auraient tous le même grand-père a). Mais avec 12 enfants on peut aussi imaginer la configuration suivante: 4 enfants pour chacune des paires $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,a\}$, et alors on n'est pas en mesure d'affirmer que 12 enfants ont le même grand-père. Conclusion: il ne peut pas y avoir 12 enfants, et on n'est donc pas dans la configuration 1). On est donc dans la configuration 2).

On note x le nombre d'enfants pour la paire $\{a,b\}$, y pour $\{b,c\}$ et z pour $\{c,a\}$. Le nombre d'enfants qui ont le même grand-père a est $x+y=m$, pour b , $y+z=n$, pour c , $z+x=p$.

On a $m+n+p=2N$, où N est le nombre d'enfants.

Supposons $N \geq 19$, alors $m+n+p \geq 38$. Si m,n,p étaient tous trois ≤ 12 , alors $m+n+p$ serait ≤ 36 , donc l'un des trois est ≥ 13 . Contradiction. Donc $N \leq 18$.

Supposons $N \leq 16$, alors $m+n+p \leq 32$. On pourrait alors imaginer $m=11$, $n=11$, $p \leq 10$ par exemple. En tout cas, on ne serait pas en mesure d'affirmer que l'un des trois est ≥ 12 . Contradiction.

Donc $N=17$ ou 18 .

Il reste à vérifier que pour $N=17$ ou 18 , on a bien les affirmations de l'énoncé:

- $N=17$: m ou n ou p doit être ≥ 12 , sinon $m+n+p \leq 33 < 2N$. Mais on peut avoir $m=12$, $n=12$, $p=10$, donc on n'est pas en mesure d'affirmer que l'un des trois est ≥ 13 .
- $N=18$: même raisonnement (on peut avoir $m=12$, $n=12$, $p=12$)

Finalement, on a deux solutions, qui sont 17 et 18.

Solution proposée par Frédéric Morlot le 27 janvier 2005