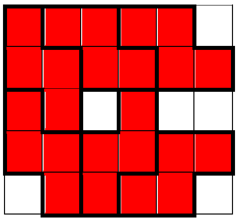
Corrigé de la première journée de la finale du CJML 2009

Problème 1

Le damier comporte 30 cases. Donc on pourra mettre au maximum 7 pièces, ce qui équivaut à 28 cases recouvertes.

Par essais successifs, on se rend vite compte que ce maximum ne saurait être atteint. On ne peut poser au mieux que 6 pièces.

Voici un exemple de configuration possible :



Remarque : nous n'avons pas fait de réelle démonstration.

Problème 2

Pour pouvoir répondre, il faut comprendre que le nombre de billes recherché est strictement compris entre 20 et 30.

Notons x le nombre de billes qu'a Mathias au départ et y le nombre de billes qu'il donne à Mathilde.

Bien sûr, $1 \leq y \leq x$.

La phrase entre guillemets donne l'équation suivante :

$3y + 0.5\times(x-y) = x$.

D'où, $5y = x$.

Donc x est un multiple de 5 compris strictement entre 20 et 30.

Donc $x = 25$.

Problème 3

Les âges de la mère et du frère sont des données parasites qui ne servent qu'à justifier l'utilisation de 7 et de 37 dans la suite.

Dressons la liste des premiers nombres obtenus :

11.
$(1 + 1) \times 7 = 14$.
$(1 + 4) \times 7 = 35$.
$(3 + 5) \times 7 = 56$.

$(5 + 6) \times 7 = 77$.
$(7 + 7) \times 7 = 98$.
$(9 + 8) \times 7 = 119$.
$(1 + 1 + 9) \times 7 = 77$.
$(7 + 7) \times 7 = 98$.
$(9 + 8) \times 7 = 119$.

Etc…

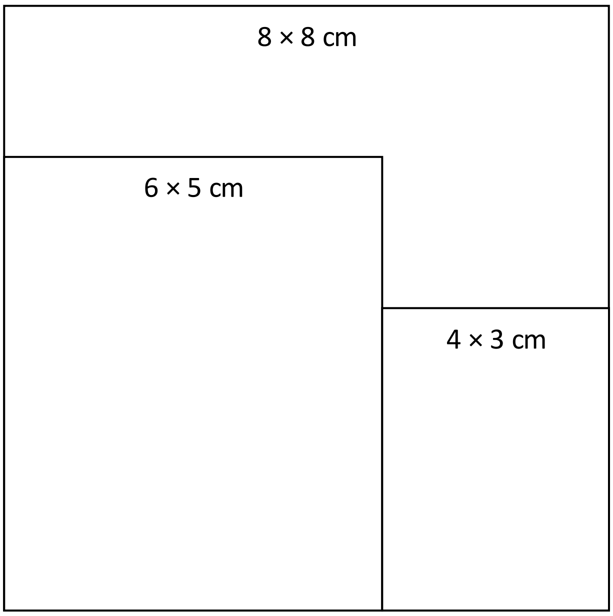
La même série 77, 98, 119 va se reproduire indéfiniment.

Les quatre premiers nombres sont différents de 77, 98 et 119, puis on retrouve 119 tous les trois nombres.

Or $37 = 4 + 3 \times 11$.

Donc le 37ème nombre est 119.

Problème 4



On doit choisir de manière évidente un carré de côté 8 cm.

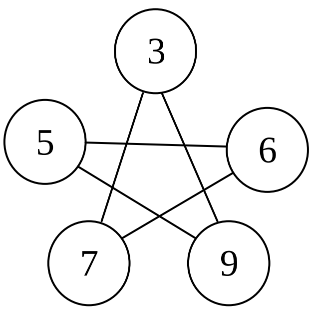
Problème 5

Il suffit de bien penser à prendre en compte les nombres que l'on écrit dans la phrase elle-même.

On obtient : "Dans ce cadre, le nombre de chiffres 1 est 3 fois plus grand que le nombre de chiffres 3."

Problème 6

En tâtonnant, on trouve le résultat suivant, non unique :



On a bien cinq nombres qui se suivent :

3 + 7 = 10.
5 + 6 = 11.
9 + 3 = 12.
6 + 7 = 13.
9 + 5 = 14.

Problème 7

Le nombre recherché est divisible par 4 et par 6, donc par le ppcm de 4 et de 6, c'est-à-dire $12 = 3 \times 4$.

Notre nombre est donc divisible par 4 et par 3.

Il s'écrit avec des 4 et des 6, donc si on le divise par 2, le résultat s'écrit avec des 2 et des 3.

Notons a ce nombre. Le nombre de départ est 2a.

a doit aussi être divisible par 2, puisque 2a est divisible par 4.

Donc a est pair.

Donc a se termine par un 2.

a doit être divisible par 3, donc la somme de ses chiffres doit être divisible par 3 également.

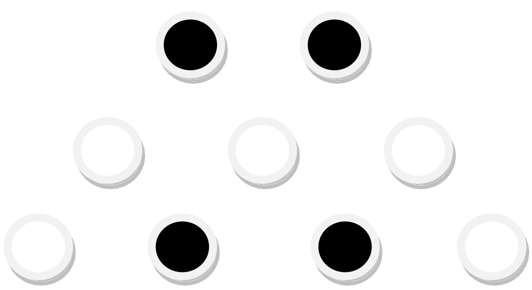
a se termine par un 2 et contient au moins un 3. Pour que la somme de ses chiffres soit divisible par 3 il doit comporter deux 2 de plus, donc en tout trois 2 et un 3, au minimum.

Le plus petit nombre s'écrivant ainsi est 2232.

Donc a = 2232 et le nombre recherché est 4464.

Problème 8

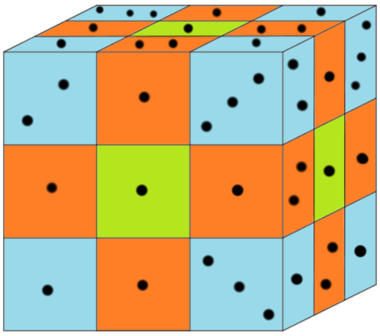
On peut couvrir tous les sommets et placer neuf pions de la manière suivante (voir l'énoncé pour les liaisons entre les pions) :



Problème 9

Ce problème est en fait assez simple.

Il y a 6 fois neuf faces de dés visibles.



Une au centre de chaque face du cube. On y fait apparaître un 1 (en vert sur le dessin).

Sur les parties rouges on peut faire apparaître un 1 et un 2, ces deux chiffres n'étant pas opposés sur un dé.

Aux huit coins du cube (en bleu), on peut faire apparaître un 1, un 2 et un 3, ces trois chiffres n'étant pas opposées sur un dé.

En effet, sur un dé, le 1 est opposé au 6, le 2 au 5 et le 3 au 4.

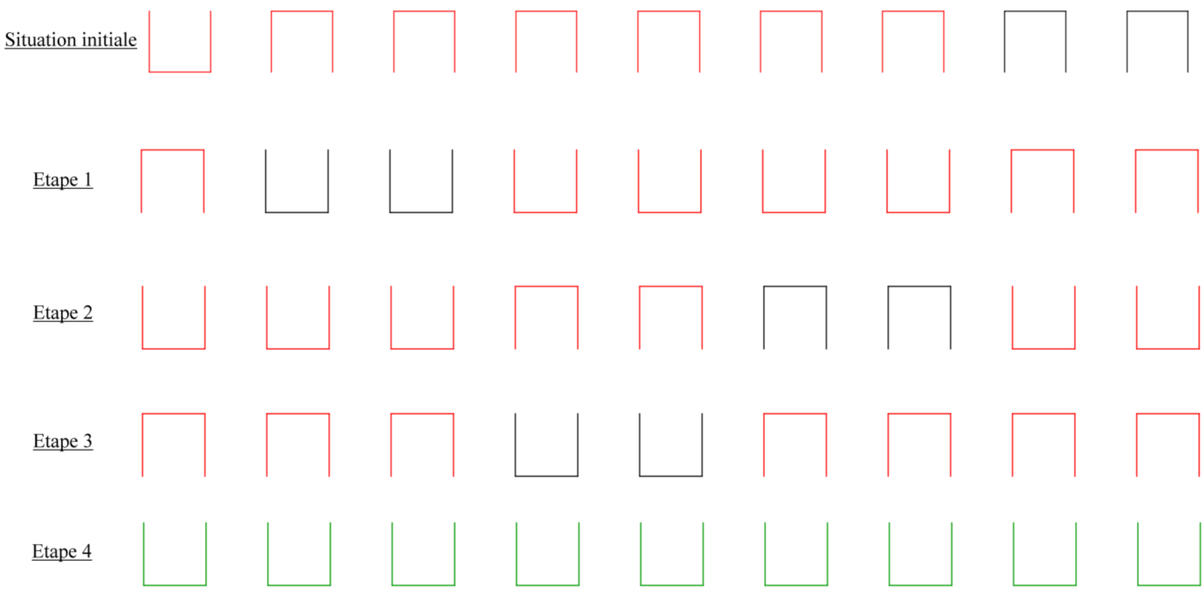
Dans cette configuration optimale, la somme des points visibles est :

Nombre de points des aires rouges + nombre de points des aires vertes + nombre de points des aires bleues = $12 \times 3 + 6 \times 1 + 8 \times 6 =$ 90 points.

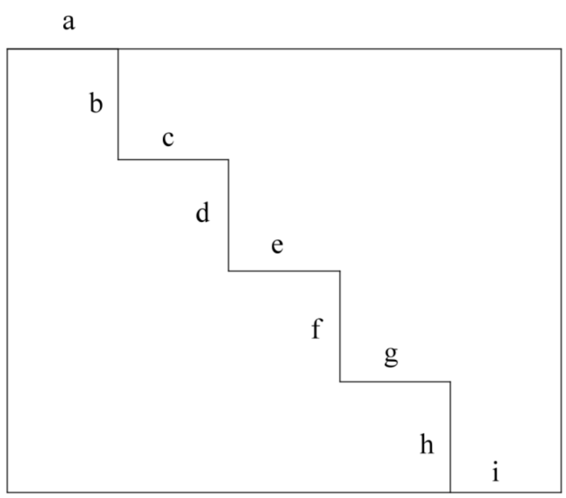
Problème 10

La situation est délicate. Je ne suis pas parvenu à la mathématiser véritablement. On trouve 4 coups au mieux, mais en bidouillant par essais successifs.

Voici comment l'on peut s'y prendre en quatre coups, avec en rouge sur une ligne les verres que l'on va bouger au coup suivant :

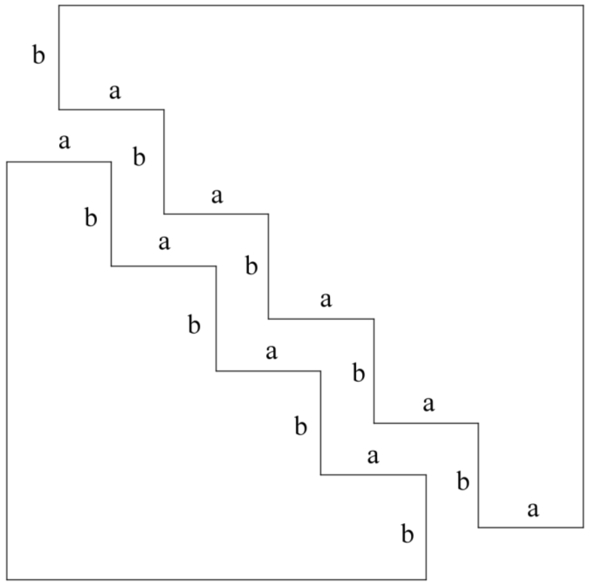


Problème 11



Les deux morceaux doivent pouvoir s'imbriquer lorsqu'on les fait coulisser. On doit donc nécessairement avoir :

$a = c = e = g = i$ et $b = d = f = h$.



La figure obtenue en déplaçant les deux morceaux doit être un carré, ce qui se traduit par :

$5b = 4a$.

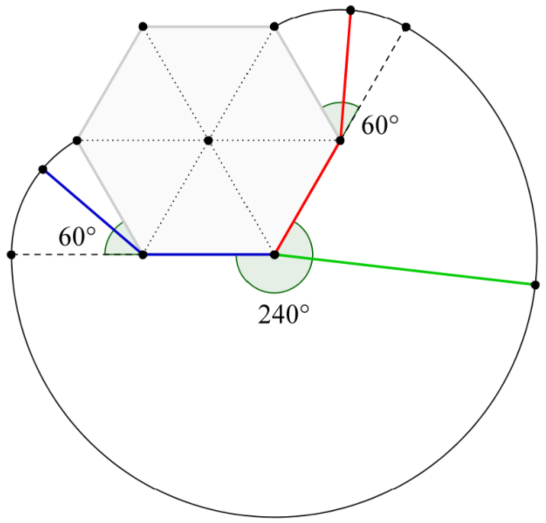
a est divisible par 5 et b est divisible par 4.

Au minimum, on a donc $a = 5$ et $b = 4$.

Donc Min(longueur de la découpe) = $4b + 3a = 31$ cm.

Problème 12

Le dessin suivant résume la situation mieux qu'une longue explication :



En vert, bleu et rouge apparaissent trois positions possibles de la laisse, celle-ci étant alors tendue.

Le grand cercle a pour rayon deux mètres et les deux petits ont pour rayon un mètre.

L'aire de la zone correspondant au grand arc de cercle est : $\pi \times 2^2 \times \frac{240}{360} = \frac{8}{3} \times \pi$.

L'aire des deux petites zones correspondant aux petits arcs de cercle est : $2 \times \pi \times 1^2 \times \frac{60}{360} = \frac{1}{3} \times \pi$.

L'aire de la région que le chien peut atteindre est donc égale à $\frac{8}{3} \times \pi + \frac{1}{3} \times \pi = 3\pi$.

Problème 13

Le problème revient en fait à chercher l'aire commune maximale au triangle et au carré.

Notons Amax cette aire et notons Ac et At les aires du carré et du triangle.

Le texte dit que : Amax = $\frac{2}{3} \times$ At = $\frac{3}{4} \times$ Ac.

Or Ac = 16 cm^2.

Donc At = $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times 16 = 18\ \text{cm}^2$. On a trouvé 1 solution.

Problème 14

Pour éviter de distinguer trop de cas (et c'est de toute façon ce qui était suggéré dans l'énoncé peut-on supposer), on suppose que les deux chiffres identiques dans les deux nombres sont disposés comme dans l'exemple donné (on peut de toute façon prouver par le calcul que tous les autres cas ne livrent pas de solutions, mais on ne s'encombrera pas de ces lignes supplémentaires ici).

On recherche donc les fractions de la forme $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$, avec a, b et c des nombres entiers compris entre 1 et 9 et 10a + b < 10b + c.

L'équation liant a, b et c se réécrit :

c = $\frac{10ab}{9a+b}$.

Il suffit de faire varier b entre 1 et 9 pour trouver toutes les solutions possibles :

<u>b = 1</u> : c = $\frac{10a}{9a+1}$. a = 1 et c = 1 conviennent mais alors l'inégalité n'est plus satisfaite.

<u>b = 2</u> : c = $\frac{20a}{9a+2}$. a = 2 et c = 2 conviennent mais alors l'inégalité n'est plus satisfaite.

<u>b = 3</u> : c = $\frac{10a}{3a+1}$. a = 3 et c = 3 conviennent mais alors l'inégalité n'est plus satisfaite.

<u>b = 4</u> : c = $\frac{40a}{9a+4}$. a = 4 et c = 4 conviennent mais alors l'inégalité n'est plus satisfaite.

<u>b = 5</u> : c = $\frac{50a}{9a+5}$. a = 5 et c = 5 conviennent mais alors l'inégalité n'est plus satisfaite.

<u>b = 6</u> : c = $\frac{20a}{3a+2}$. a = 1 et c = 4, a = 2 et c = 5, a = 6 et c = 6 conviennent, mais a = 6 et c = 6 ne satisfont pas l'inégalité. On obtient donc deux solutions : $\frac{16}{64}$ et $\frac{26}{65}$.

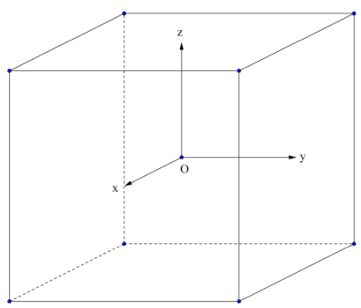
<u>b = 7</u> : c = $\frac{70a}{9a+7}$. a = 7 et c = 7 conviennent mais alors l'inégalité n'est plus satisfaite.

<u>b = 8</u> : c = $\frac{80a}{9a+8}$. a = 8 et c = 8 conviennent mais alors l'inégalité n'est plus satisfaite.

<u>b = 9</u> : c = $\frac{10a}{a+1}$. a = 1 et c = 5, a = 4 et c = 8, a = 9 et c = 9 conviennent, mais a = 9 et c = 9 ne satisfont pas l'inégalité. On obtient donc deux solutions : $\frac{19}{95}$ et $\frac{49}{98}$ que l'on connaît déjà.

On a donc obtenu 3 solutions : $\frac{16}{64}$, $\frac{19}{95}$ et $\frac{26}{65}$.

<u>Problème 15</u>



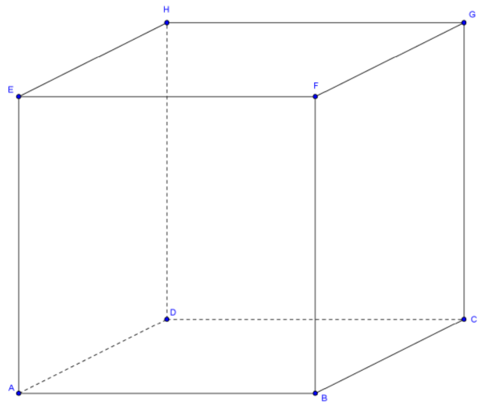
Le cube possède 6 faces et chaque face a 2 diagonales. Sans tenir compte des rotations, si on trace une diagonale sur chaque face du cube, il y a 2^6 cubes décorés possibles.

Mais par rotations autour des axes (Ox), (Oy) et (Oz), on divise à chaque fois par deux le nombre de possibilités.

Donc le nombre de cubes distincts, en tenant compte des rotations, est égal à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2^6 = 2^3 = 8$.

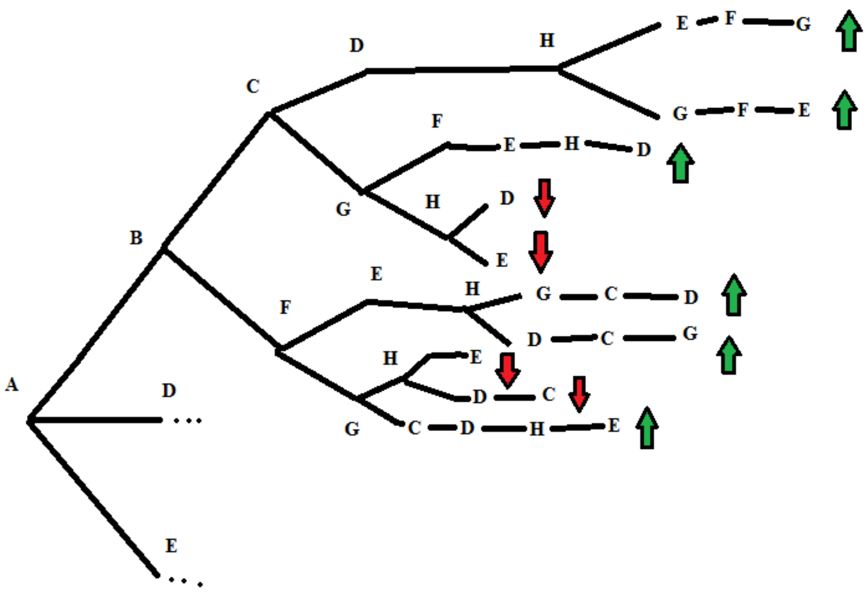
Il y a 8 cubes différents possibles.

Problème 16



On suppose que la fourmi part du sommet A du cube. Elle se rend forcément à l'issue du premier mouvement en B, en D ou en E. Après ce premier mouvement, le nombre de chemins permettant de passer par tous les sommets est le même que l'on parte de B, de D ou de E, les trois sommets jouant des rôles équivalents par rapport à A.

Regardons donc combien de chemins conviennent après avoir fait par exemple le trajet A – B. Le plus simple pour ce faire est de dessiner un arbre :



Au bout de la branche A - B - … 6 chemins conviennent (flèches vertes). Les flèches rouges indiquent des chemins qui obligeraient la fourmi à passer par un sommet déjà traversé lors des mouvements précédents. On n'a donc pas donné la suite des possibilités après ces flèches rouges.

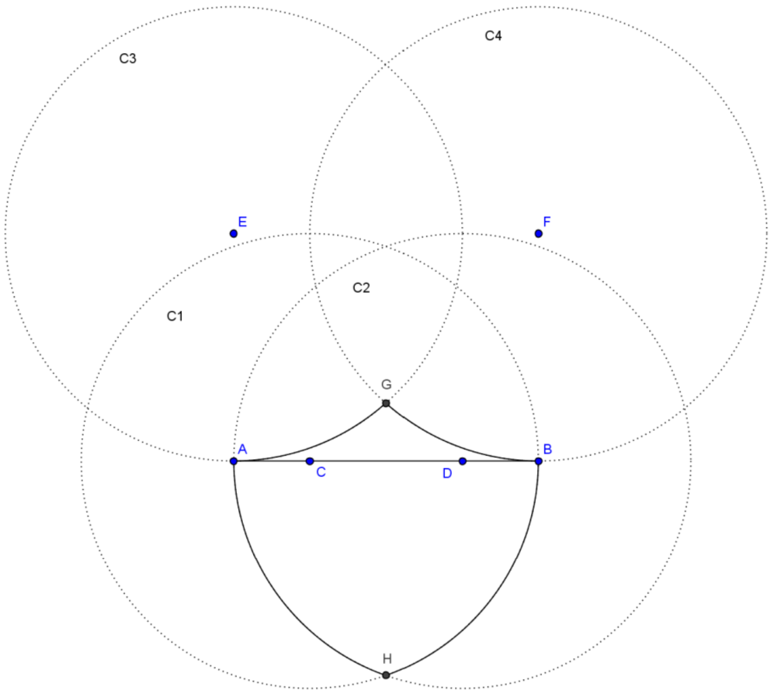
Les branches A - D - … et A - E - … donneront elles aussi 6 chemins convenables chacune.
On trouve donc 18 trajets permettant à la fourmi de parcourir tous les sommets en sept mouvements.

L'arbre complet comporte lui 3^7 branches, puisqu'à chaque mouvement la fourmi a le choix entre 3 sommets.

Donc la probabilité recherchée est égale à $\frac{18}{3^7} = \frac{6}{729} = \frac{2}{243}$.

Problème 17

La situation est délicate à aborder et je n'aurais pas trouvé en temps limité !



Sur le dessin [AB] est le grand segment horizontal. Les centres des cercles C3 et C4 sont situés au-dessus de A et de B et les centres des cercles C1 et C2 sont situés sur [AB].

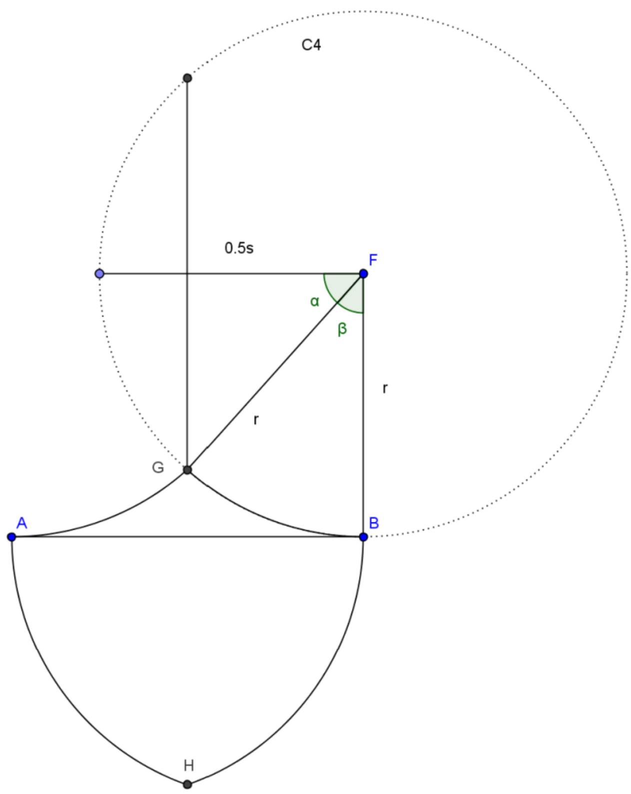
Notons s = AB et r le rayon commun aux quatre cercles. On doit avoir $s \leq 2r$ pour que C3 et C4 ne soient pas disjoints.

Commençons par calculer les longueurs des deux arcs AH = HB et AG = GB en fonction de r et s.

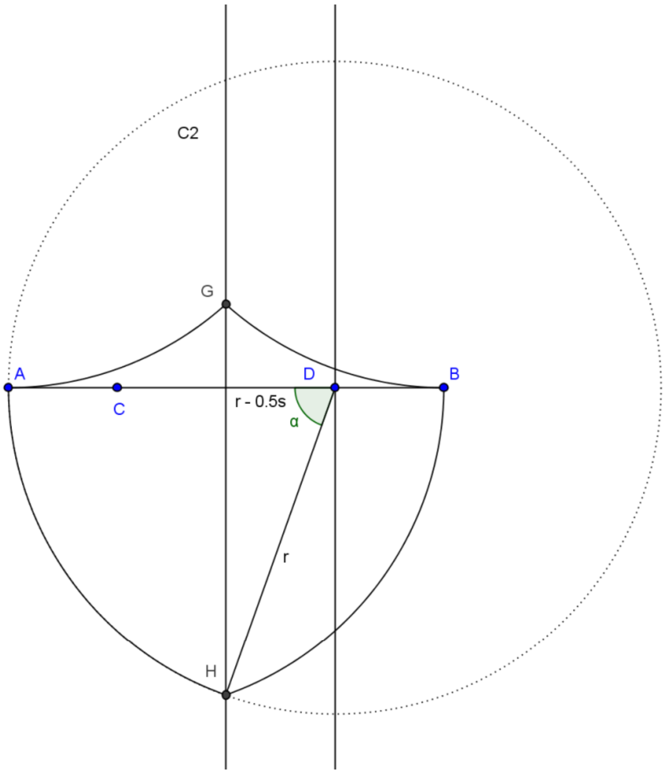
$\alpha = \arccos(\frac{s}{2r})$.

$\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{s}{2r})$.

D'où $AG = GB = r\times\beta = r \times (\frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{s}{2r}))$.



Calculons maintenant AH = HB.



On a α = arccos($\frac{r-0.5s}{r}$).

D'où AH = HB = r×β = r × arccos($\frac{r-0.5s}{r}$).

Les deux arcs doivent former un quart de cercle, donc AH + AG = $\frac{r\pi}{2}$, ce qui donne :

arccos($\frac{r-0.5s}{r}$) + $\frac{\pi}{2}$ - arccos($\frac{s}{2r}$) = $\frac{\pi}{2}$, d'où :

arccos($\frac{r-0.5s}{r}$) = arccos($\frac{s}{2r}$) .

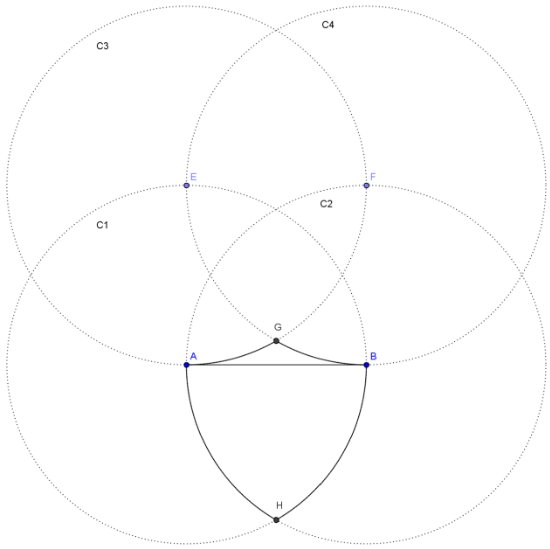
En prenant par exemple r = 0.5 (on ne fait alors que choisir une échelle, ce qui ne changera en rien les mesures des angles et les rapports de longueurs), on obtient :

arccos(1 – s) = arccos(s), ce qui donne s = $\frac{1}{2}$.

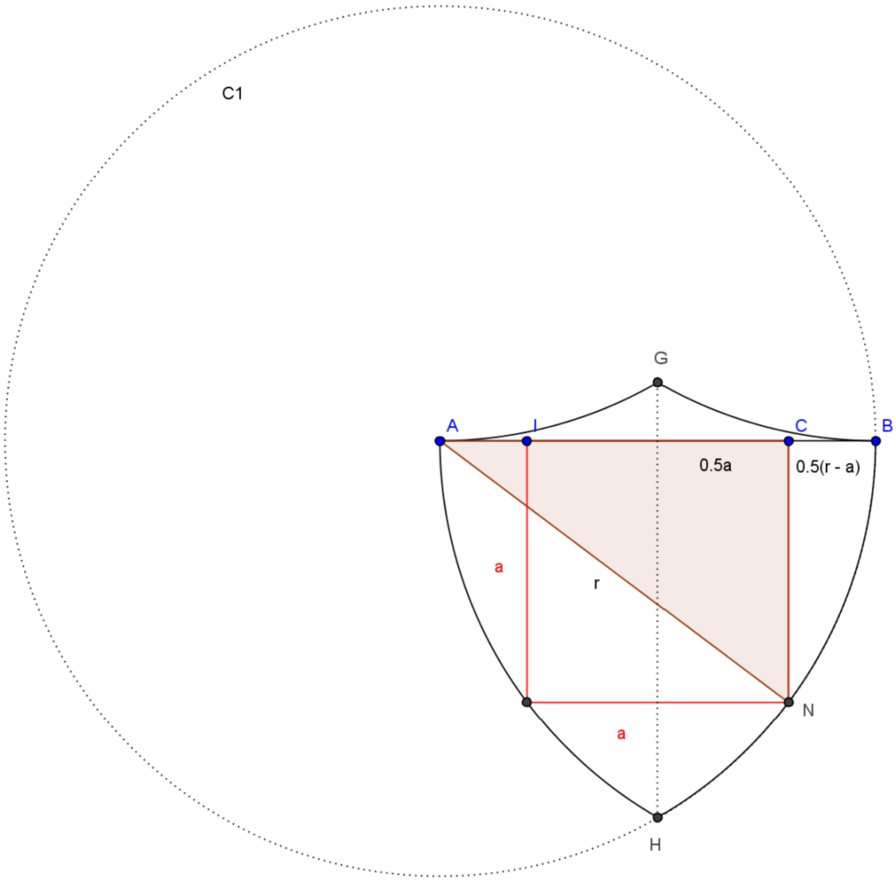
Donc s = r = 0.5. On a bien s ≤ 2r.

On obtient au passage AH = HB = $\frac{\pi}{6}$ et AG = GB = $\frac{\pi}{12}$.

Ce résultat permet de faire un nouveau dessin, avec s = r :



Dessinons le carré (il ne s'agit pas d'un rectangle même si l'énoncé ne le précise pas) et notons a la longueur de son côté :



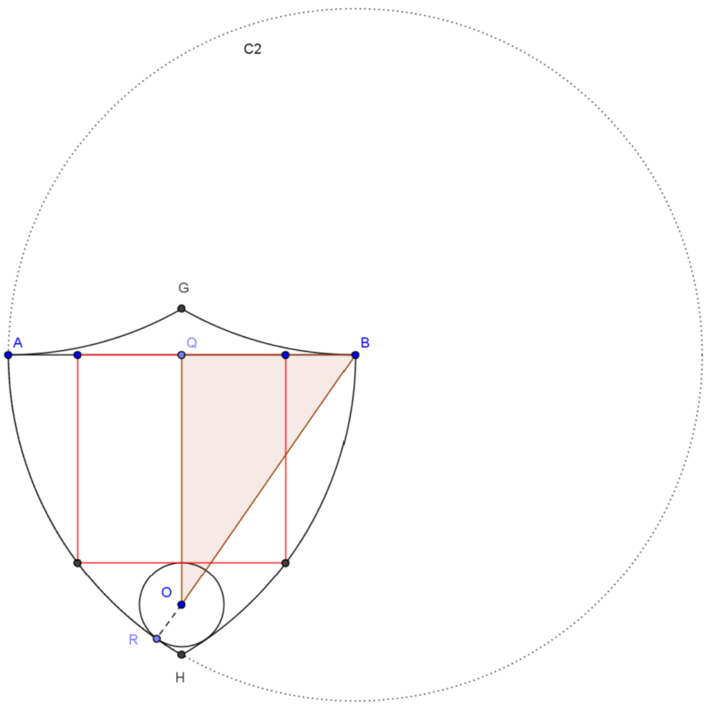
Pythagore dans le triangle ACN s'écrit :

$r^2 = a^2 + 0.25(r + a)^2$, ce qui donne après développement et regroupement :

$3r^2 = 5a^2 + 2$ ra i.e., sachant que $r = 0.5$, $5a^2 + a - 0.75 = 0$.

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 en a est $\Delta = 4^2$.

a est donc égal à -0.5 ou 0.3. Or a est strictement positif, donc a = 0.3 cm.



Nous avons désormais tous les outils en main pour déterminer les rayons des deux petits cercles. Commençons par le plus grand. Notons r1 son rayon.

Dans BQO, on a :

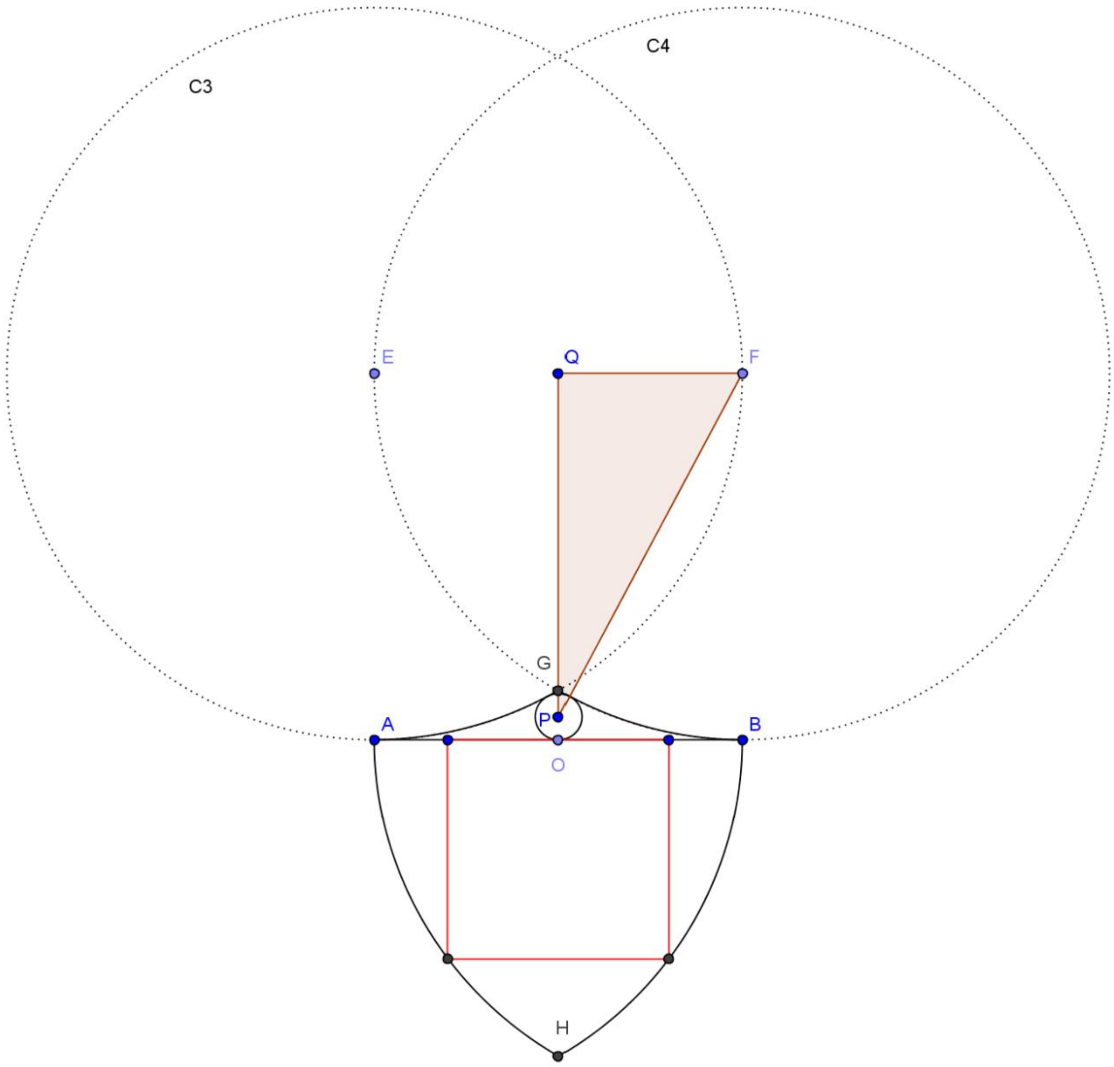
BQ = 0.5r.
OQ = a + r1.
BO = r – r1.

On applique ensuite Pythagore à BQO :

$(0.5r)^2 + (a + r1)^2 = (r - r1)^2$, avec r = 0.5 et a = 0.3.

Après développement, on trouve $r1 = \frac{39}{640}$.

Même idée avec le plus petit cercle, en notant r2 son rayon :



Dans PQF, on a :

QF = 0.5r.
QP = r – r2.
PF = r + r2.

On applique ensuite Pythagore à PQF :

$(0.5r)^2 + (r - r2)^2 = (r + r2)^2$, avec r = 0.5.

Après développement, on trouve $r2 = \frac{1}{32}$.

On peut alors enfin conclure : le rapport du plus grand au plus petit rayon est : $\frac{r1}{r2} = \frac{39}{20}$.

Peut-être y avait-il plus direct ? Sinon il me semble impossible de faire tout cela en moins d'une bonne heure et demie !

Problème 18

Ici je sèche. Je renvoie le lecteur à la fiche de réponse officielle pour les deux réponses qu'il fallait trouver, car je n'ai pas d'explication à proposer !

Pour me contacter : florianbaude@fnac.net.