Petit Traité de la Théorie des Ensembles

A l'Usage des Etudiants

''Die Menschen verhöhnen, was sie nicht verstehen'', Goethe

Claude Villars 2010

Petit Traité de la Théorie des Ensembles
A l’Usage des Etudiants

Dans l’ensemble des étudiants, je compte mes 18 petits-enfants, de Anne née en 1988 à Vincent né en 2003.

Table des matières

Théorie: introduction***,*** définition, représentation tabulaire, nombre d’éléments, surcharge, opérations.
Pratique: le problème de Diophante.

Introduction

Les mathématiques sont une source infinie de jouissances pour ceux qui privilégient l’intelligence à la force, le cerveau au muscle ou à une Kachelnikov.

D’où notre plaisir de participer, d’analyser les problèmes de la FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques). Le problème 18 (le plus difficile) des qualifications 2010 est un vrai défi, où l’emploi d’outils plus puissants que ceux du niveau des collèges ou des écoles secondaires, constitue une aide.

Daniel Collignon, *DC* analyse la démarche permettant de trouver la solution du problème cité au moyen d’***ensembles***. Le but de ce petit traité est de mettre les techniques de ***la théorie des ensembles*** à la disposition de 14-18. Ensuite nous pourrons appliquer nos nouvelles connaissances à la résolution du problème de Diophante et éventuellement attaquer le problème 18 des qualifications 2010 de la FFJM.

Cette présentation se veut à la fois théorique et pratique, abstraite et concrète, afin que chacun puisse bien comprendre. Comme illustration nous prendrons les ensembles décrivant le problème de Diophante.

Remerciements: j’aimerais remercier ici M. Daniel Collignon pour son aide immense. Je me suis inspiré de son analyse du problème 18 des qualifications FFJM 2010. En outre, il a répondu inlassablement à mes très nombreux e-mails et m’a fait découvrir le site de Diophante: http://www.diophante.fr/E3

Théorie

Définition

Un ensemble, c'est quoi ?

Un ensemble est une collection d'objets de même nature.

Exemples:

Ensembles de nombres

Nombres naturels	$\mathbb{N} = \{0;1;2;...\}$
Naturels non nuls	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Nombres entiers	$\mathbb{Z} = \{...;-2;-1;0;1;2;...\}$
Nombres rationnels	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\right\}$
Nombres réels	$\mathbb{R}$
Nombres irrationnels	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Nombres complexes	$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$
Réels non nuls	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Réels négatifs	$\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq 0\}$
Réels positifs	$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$

On utilise des notations analogues pour $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

```
// nombres réels: voir Google, Wikipédia:
nombre à développement décimal fini ou infini, par exemple
racine(2) ou pi()
```

```
Exemple: ensemble des paires de nombres, compris entre 1 et
valMax, bornes incluses.

Soit x et y les deux nombres, on peut noter la paire sous la
forme (x, y)
```

Un ensemble est une variable au sens large (adresse, pointeur), nous pouvons l'identifier par une lettre majuscule à laquelle nous affectons ses paramètres, entre { }, séparés par un séparateur. On utilise souvent une police ''ajourée'' (voir plus haut) pour que les professeurs qui écrivent encore au tableau noir, ne dépense pas trop de craie. La poussière de craie dans les poumons est cancérigène.

Le séparateur utilisé est le plus souvent /, je préfère utiliser le \ pour éviter des confusions avec le symbole de la division (/).

Les paramètres sont, en première place le ou les membres de l'ensemble, ensuite des relations pouvant exister entre les membres.

Dans notre exemple, ***l'ensemble des paires*** possibles des nombres compris entre 1 et valMax peut se noter sous la forme.

E1 = {(x,y)\ 1<=x<=y<=valMax\ x*y= p\ x+y=s}   // ensemble no-1

Représentation tabulaire d'un ensemble

A partir de l'expression définie plus haut, on peut créer une forme concrète d'un ensemble où chaque élément est représenté.

Pour cela, nous utiliserons une table (ou tableau), chaque ligne est un élément, chaque colonne contient des paramètres ou des expressions concernant l'élément. Nous disposons de toutes les valeurs concrètes des éléments de l'ensemble. C'est une véritable base de données.

Exemple: **E1** sous forme de table; valMax= 10, voir page suivante,

Que l'on limite l'âge des filles à 10 ans n'est pas une restriction, la logique ne change pas (ou presque, voir page 11), mais ça permet de travailler avec des tables moins volumineuses.

Les paires dont le produit est un nombre premier, sont rehaussées en rose. Ce sont les paires qui auraient permis à Pierre de répondre sans ambiguïté à la question de Diophante (voir page 9).

Il existe de bons programmes pour traiter les tableaux, par exemple Excel de Microsoft ou encore calc de la suite openoffice (gratuit).

L'ensemble E1 sous forme de table, table-1

	x	y	x*y= p	x+y=s
1	1	1	1	2
2	1	2	2	3
3	1	3	3	4
4	1	4	4	5
5	1	5	5	6
6	1	6	6	7
7	1	7	7	8
8	1	8	8	9
9	1	9	9	10
10	1	10	10	11
11	2	2	4	4
12	2	3	6	5
13	2	4	8	6
14	2	5	10	7
15	2	6	12	8
16	2	7	14	9
17	2	8	16	10
18	2	9	18	11
19	2	10	20	12
20	3	3	9	6
21	3	4	12	7
22	3	5	15	8
23	3	6	18	9
24	3	7	21	10
25	3	8	24	11
26	3	9	27	12
27	3	10	30	13
28	4	4	16	8
29	4	5	20	9
30	4	6	24	10
31	4	7	28	11
32	4	8	32	12
33	4	9	36	13
34	4	10	40	14
35	5	5	25	10
36	5	6	30	11
37	5	7	35	12
38	5	8	40	13
39	5	9	45	14
40	5	10	50	15
41	6	6	36	12
42	6	7	42	13
43	6	8	48	14
44	6	9	54	15
45	6	10	60	16
46	7	7	49	14
47	7	8	56	15
48	7	9	63	16
49	7	10	70	17
50	8	8	64	16
51	8	9	72	17
52	8	10	80	18
53	9	9	81	18
54	9	10	90	19
55	10	10	100	20

Nombre d’éléments d’un ensemble

Le nombre d’éléments d’un ensemble est un paramètre important d’un ensemble.
Il mérite un paragraphe spécial.

La fonction <*nombre d’éléments*> est appelée aussi <*cardinal*>, nous la dénoterons par **#( ),** l’argument entre parenthèses est le nom de l’ensemble.
Le dénombrement des éléments dépend de la nature de ceux-ci. Dans l’exemple qui nous sert de fil conducteur, il s’agit d’une paire de nombres choisis entre 1 et 100. C’est un cas connu, on l’appelle ***combinaisons avec répétitions de k éléments choisis parmi n***, pour lequel existe une formule mathématique:

combiR(k,n)= (n+k-1)!/(k!* (n-1)!)   // n! se dit n factoriel, 1*2*3* … n

Calculez combiR(2,10)   // réponse 55, c’est le nombre de lignes de l’ensemble **E1** dans une représentation tabulaire, voir page précédente.

#(E1) = combiR(2,10)

Exercices:

1. Combien y a-t-il de nombres premiers dans l’intervalle de 1 à 100 ?
Réponse: 25

2. Ecrivez l’ensemble de la différence de 2 nombres premiers consécutifs dans l’intervalle 1 à 100.

3. Combien de mots de 3 lettres peut-on fabriquer avec un alphabet de 26 lettres ?

La surcharge

Avant de passer aux opérateurs sur les ensembles, définissons la notion de surcharge.

La surcharge consiste à rajouter, par-dessus la définition première d'un élément quelconque, un nouveau sens. Dans le langage courant cette pratique est usuelle. Exemple: on lit dans les avis mortuaires ''*la Baronne Gwendolyn de la Roche-Pointue s'est endormie paisiblement dans sa 94ème année".* Il ne s'agit pas ici de s'endormir pour se réveiller le lendemain matin, mais de s'endormir pour ne plus se réveiller. Ce n'est pas la même chose.

En mathématiques, cette pratique est courante, par exemple on définit l'addition sur les nombres complexes comme surcharge de l'addition ''classique'' sur les nombres réels.

Comment fait-on la différence entre le sens primaire et une surcharge? Il y a plusieurs méthodes:

- utiliser un autre symbole,
- ne rien faire, utiliser l'ancien symbole, le nouveau sens (la surcharge) est évident si on considère le contexte. C'est pratique surtout si on doit envoyer un document par Internet.

Nous utiliserons les deux méthodes.

Exercices

1. Définissez la surcharge de l'addition (au moyen dune procédure) dans le cas de calculs horaires.
   Exemple 23:34 heures + 52 minutes = 1 jour et ? minutes
2. Idem pour les calculs de jours d'intérêt (tenant compte des années bissextiles), 18 février 2008 + 34 jours = ?

Les opérations sur les ensembles

On connaît les opérations d’addition, de soustraction, de multiplication et de de division sur les nombres réels. On utilise les symboles +, -, *, /.
Il est d’usage courant d’étendre ces opérations à d’autres structures.

Exemple-1: j’achète une vigne, j’ajoute un bien à mon patrimoine
Exemple-2: :.définissez l’addition sur l’ensemble des nombres complexes.

En principe, les opérations se font sur des objets de même nature, on ne peut pas additionner des pommes et des poires. Bien que 2 kg de pommes plus 3 kg de poires donne 5 kilos de fruits !

On définit, entre autres, les opérations suivantes sur les ensembles:

- ***l’intersection A & B,*** les éléments communs à la fois de A ***et*** de B

- ***l’union*** de A, B, les éléments de l’union peuvent être dans A ***ou*** B

c’est une surcharge des opérateurs connus ET , OU

`Exercice: Définissez le OU-exclusif pour les ensembles.`

L’opérateur ‘’inclus’’:

x inclus dans E,

le symbole mathématique est un U couché barré d’une barre horizontale.
Comme ce symbole n’est pas pratique pour des messages Internet ou peut donner des problèmes à l’impression, je propose d’utiliser:

x << E

Finalement, ***‘’est diviseur’’,*** une barre verticale ou ici // signifiant
‘

n1// n2

Exemples: 3// 24; (2, 3, 4, 6, 12)// 24

E3. Les problèmes impossibles
E305. Un autre classique

Diophante tend à Pierre un papier sur lequel figure un nombre qui est le produit des âges de ses deux nièces et à Sébastien un autre papier sur lequel figure la somme de ces âges.

Diophante : *Devinez leurs âges*

Pierre : *Je ne peux pas les déterminer*

Sébastien : *Moi non plus*

Diophante : *Vous me décevez*

Pierre : Mais je peux donner leurs âges, maintenant

Quels sont ces deux âges (supposés l'un et l'autre >0)?

Source : Revue Jeux & Stratégie n° 55 ? février 1989

Solution

Si Pierre ne peut pas déterminer les deux âges, le produit P que lui a donné Diophante n'est donc pas un nombre premier. Sébastien de son côté a une somme S qui ne peut pas être égale à 2, si non le couple (1,1) aurait été donné par Pierre. S ne peut pas non plus être égale à 3 car Pierre aurait donné (1,2) ni à 4 car si Pierre avait eu un produit de 3, il aurait indiqué le couple (1,3).Il ne resterait que (2,2) et Sébastien serait en mesure de conclure. En revanche toute somme supérieure ou égale à 5 vue par Sébastien est possible.

Pierre après la première réponse de Sébastien sait donc que la somme est au moins égale à 5. S'il donne la solution, c'est qu'il n'a aucune ambiguïté à lever et ceci n'est possible que si le couple est (1,P) avec P+1>= 5 ou P>= 4. et si P prend la petite valeur possible P=4. Comme le couple (2,2) dont le produit est 4 a déjà été rejeté, la seule solution possible est (1,4).

On voit que l’on peut trouver la solution sans utiliser la théorie des ensembles. Essayons quand-même de concrétiser la solution au moyen de nos nouvelles connaissances.

Mais d’abord une réflexion: Diophante est un habile mathématicien, c’est en regardant la table 1 qu’il a imaginé la question à poser à Pierre et Sébastien. Dans la table il y a au moins une paire de nombres dont le produit et la somme ne sont pas ambigus.

Le premier ensemble étudié E1, (page 4 et 5) représente le choix qui s'offre à Diophante quand il prépare ses deux papiers.

Une deuxième ensemble E2{ } est celui des produits avec comme paramètre la multiplicité de leurs diviseurs, les nombres premiers ayant été écartés.

Les produits n'ayant qu'une seule décomposition pour valMax sont marqués en vert.

Si valMx prend une valeur plus grande, par exemple 100, les produits plus grands que 10 prennent aussi une double décomposition.

Table-2

	p	*x*y*	*x*y*	*#(x*y)*
1	4	1*4	2*2	2
2	6	1*6	2*3	2
3	8	1*8	2*4	2
4	9	1*9	3*3	2
5	10	1*10	2*5	2
6	12	2*6	3*4	2
7	14	2*7		1
8	15	3*5		1
9	16	2*8	4*4	2
10	18	2*9	3*6	2
11	20	2*10	4*5	2
12	21	3*7		1
13	24	3*8	4*6	2
14	25	5*5		1
15	27	3*9		1
16	28	4*7		1
17	30	3*10	5*6	2
18	32	4*8		1
19	35	5*7		1
20	36	4*9	6*6	2
21	40	4*10	5*8	2
22	42	6*7		1
23	45	5*9		1
24	49	7*7		1
25	50	5*10		1
26	54	6*9		1
27	56	7*8		1
28	60	6*10		1
29	63	7*9		1
30	64	8*8		1
31	72	8*9		1
32	80	8*10		1
33	81	9*9		1
34	90	9*10		1
35	100	10*10		1

Pour que Pierre soit devant une ambiguïté, il faut que le nombre de décomposition du produit soit égal ou supérieur à 2.

Pour Sébastien, quelles sont ses sommes ambiguës ?

Relisez la solution de la page 9. Pour des valeurs de s= 1, 2, 3, 4 il n'y a pas d'ambiguïtés pour Sébastien. Comme Sébastien répond:

‘”*Moi non plus”,* ambiguïté pour Sébastien, donc somme >= 5.

Au tour de Pierre, il répond, donc il n'a plus d'ambiguïté à lever, il sait que la somme de Sébastien >=5, mais son produit ne peut admettre qu'une seule décomposition.

Avec valMax=10, on trouve des solutions où le produit n'admet qu'une seule résolution (e.g. 14, 15, ..), 22 possibilités. Notre hypothèse est restrictive.

Avec valMax=100, tous les produits mentionnés ci-dessus sont ambigus.

Donc le couple doit être de la forme 1,y, le produit y et la somme 1+y

d'où s= p+1>= 5, mais 1,5 a déjà été éliminé (nombre premier) et 1,6 à 1,9 sont ambigus.

4 pour la somme permet un produit de 3 (1*3) ou 4 (2*2). (1,3) aurait permit à Pierre de répondre, il ne l'a pas fait, donc resterait pour Sébastien (2,2), mais Sébastien n'a pas pu conclure non plus. Cette hypothèse est doc à rejeter.

Le choix se limite à 5 (ou plus) pour la somme et à 4 pour le produit.

Seule la paire (1,4) remplit cette condition.

c.q.f.v.

Merci de votre attention