

LES CHEMINS DU CERVEAU
Problèmes de la FFJM
Volume 2, février 2010
Qualification 2010

Claude Villars
Corrections et compléments:
Daniel Collignon

On commence de vieillir quand on finit d'apprendre.

L'art de mettre la réflexion au service de l'imagination.

*Un mélange judicieux de logique, de bon sens, de malice,
de précision et de patience.*



*Les merveilles du monde,
quand tout est calme, harmonie et intelligence,
comme le domaine des problèmes de la FFJM*

Table des matières

1. Références
2. Introduction, fascination de l'intelligence
3. Problème 1: le jeu de l'année
4. Problème 2: la boum
5. Problème 3: addition littérale
6. Problème 4: les bus
7. Problème 5: la différence de l'année
8. Problème 6: Pyramide logique
9. Problème 7: le code
10. Problème 8: trois symboles à barrer
11. Problème 9: l'encyclopédie universalis
12. Problème 10: Mastermind glissant
13. Problème 11: moitiés de somme
14. Problème 12: le quadrilatère
15. Problème 13: en sept coups de scie
16. Problème 14: l'anagramme sextuple
17. Problème 15: le grand nombre
18. Problème 16: les trois carrés
19. Problème 17: les nombres de Michel
20. Problème 18: la farce du concierge
21. Epilogue, conclusions
22. Solutions

Références

1. Les concours de la FFJM ou les chemins du cerveau (quart 2009)
2. Schlachten, die grössten Gefechte der Weltgeschichte, Parragon
3. Winston Churchill, *Mémoires de guerre 1919-1941*

Persévérant, imaginatif, **intelligent**,
débarrasse le monde du nazisme.



4. <http://www.diophante.fr/E3.-les-problemes-impossibles/>
Plus de 800 problèmes avec leur solution,
dont des cas spécialement utiles pour le problème 18 « la farce du concierge »
5. Petit traité de la théorie des ensembles, C. Villars, 2010

2. Introduction, fascination de l'intelligence

L'intelligence fascine. On ne sait pas trop ce que c'est, mais comme l'électricité, on la cerne en étudiant ses effets. Pour l'électricité, c'est mettre ses doigts dans une prise de 220 volt, pour l'intelligence c'est essayer de comprendre comment le cerveau trouve la solution de problèmes donnés, ici ceux de la FFJM (Fédération française des Jeux mathématiques). Mais ça peut être aussi l'étude des grandes batailles de l'histoire (ref. 2, 3). Ici l'intelligence souvent se définit par son contraire: la bêtise, dans les grandes batailles de l'histoire on voit souvent peu d'intelligence et beaucoup de bêtise.

Dans le premier volume de cette série, nous avons énuméré les approches possibles:

- **inspection**, la solution saute aux yeux
- **déduction logique**, prémisses, conclusion
- **jeu d'équations** et filtres si le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations (généralement le cas)
- **brute force**, essayer tous les cas possibles, avec aussi l'emploi de filtres
- **simulation**, jouer le jeu

Nous nous permettons consciemment d'outrepasser les règles de la FFJM: en essayant d'écrire à l'ordinateur un programme capable de résoudre le problème, on obtient une solution "intelligence artificielle" image d'une méthode naturelle. Ça ne jouera pas dans tous les cas (mais ça a joué pour le tournoi Kasparov contre Deep-Blue d'IBM).

Pour compléter l'étude de l'intelligence on pourrait chercher à établir une corrélation entre le coefficient d'intelligence et les résultats des jeux FFJM. Les concours de la FFJM sont un révélateur des capacités de chacun, d'abord les problèmes faciles où on se croit très intelligent (euphorie), ensuite la zone grise, intermédiaire, on voit des aspects du problème, mais on n'arrive pas à conclure (doute), enfin la zone d'incapacité quand l'intelligence de l'individu ne suffit plus (frustration ou acceptation zen).

Autre sujet pour des étudiants en psychologie en mal de thèse: le rôle du papier, crayon, gomme. Les grands joueurs d'échecs peuvent jouer simultanément quelques dizaines de parties, ils ont tout dans la tête. Les premiers problèmes de la FFJM peuvent se faire de tête, après papier, crayon, gomme, crayons de couleur, compas sont utiles et nécessaires.

Finalement, ne pas omettre de **lire 10 fois l'énoncé**. De comprendre exactement l'énoncé (savoir le dire à sa petite sœur ou sa grand'mère) dans toute son étendue, c'est souvent déjà être à mi-chemin de la solution.

Chers amis, amies, courage.

3. Problème 1: le jeu de l'année

1 LE JEU DE L'ANNÉE

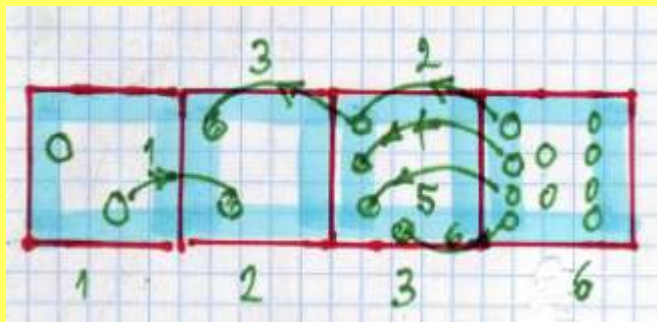
On part de la situation illustrée par la figure:



la première case, à gauche, contient 2 pions, et la quatrième 10 pions. Ensuite, chaque coup consiste à déplacer un pion, et un seul, d'une case à une case située immédiatement à côté. On veut obtenir une situation telle qu'aucune case ne soit vide et que les quatre cases contiennent des nombres de pions tous différents les uns des autres. **Combien faudra-t-il de coups, au minimum?**

Ce problème est proposé dès la 3^{ème} classe, c.à.d. pour des enfants de 9 à 10 ans. Alors les adultes ?

La méthode ? Jouer le jeu, déplacer des pions. En 6 coups on obtient 1,2,3,6 pions dans les 4 cases. Dessinez les trajectoires.



Satisfait ?

Et bien non, en **5 coups** vous obtenez 2 1 3 6. (D. Collignon)

Moralité: ne jamais se précipiter, se relire deux fois

Life is full of rude awakenings.

Il est salutaire d'être remis en place de temps à autre.

Si vous perdez, ne perdez pas la leçon (Dalaï-lama)

4. Problème 2: la boum

2 LA BOUM

Quatre filles et quatre garçons participent à une boum. Chaque danse se fait à deux, entre une fille et garçon. A un moment, on leur demande combien de danses ils ont dansé depuis le début. Les quatre garçons répondent: 2, 0, 0 et 10. Trois des filles répondent: 1, 2, 3.
Quelle sera la réponse de la quatrième fille?

Les seules connaissances à avoir sont les règles de l'addition et de la soustraction. Ensuite, on visualise la scène. Il y a eu 12 danses. Il en faut autant chez les filles donc $12 - 6$ ça donne 6 pour la réponse de la 4^{ème} fille.

Et si vous n'y arriveriez pas ? Il faut aussi des poètes et des coiffeurs pour chiens.

5. Problème 3: addition littérale

3 ADDITION LITTÉRALE

Complétez la troisième phrase avec des nombres écrits en lettres de façon que cette phrase soit vraie et que:

- les nombres écrits dans ces trois phrases soient tous différents;
- les trois phrases comportent le même nombre de lettres;
- dans chaque phrase, les nombres soient rangés du plus petit au plus grand.

UN ET QUATRE FONT CINQ.
TROIS ET SIX FONT NEUF.
_____ ET _____ FONT _____.

Après avoir lu 10 fois l'énoncé, on sait que:

- le nombre de chiffres est 12
- les nombres pas encore utilisés sont 2, 7, 8, 10, 11, ... Mais on peut exclure les grands nombres, par exemple dix-neuf, vingt-quatre parce que trop gourmand en chiffres.

On essaie quelques combinaisons possibles en commençant par 2, par exemple 2,8,10. Mais le nombre de chiffres ne joue pas.

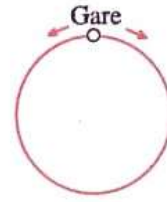
Alors, un 2^{ème} essai, youpih, j'ai trouvé.

6. Problème 4: les bus

4 - LES BUS

A Mathville, il existe une ligne de bus circulaire.

A partir de 7 heures, des bus partent de la gare toutes les 20 minutes et parcourent la ligne dans le sens des aiguilles d'une montre. A partir de 7 h 10 des bus partent de la gare toutes les 20 minutes et parcourent la ligne dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Chaque bus met exactement 40 minutes pour parcourir la ligne et revenir à la gare. Ainsi, le bus qui part de la gare à 8 heures arrivera à nouveau à la gare à 8 h 40. **Combien de bus aura-t-il alors croisé ?**

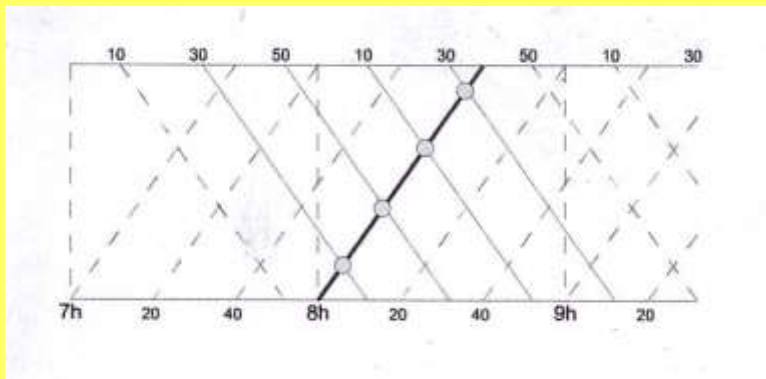


Enfin un problème où l'on peut être moins stressé, moins intelligent. Il faut être consciencieux, appliqué, persévérant, précis. Le bon élève qui fait plaisir à sa maman, mais qui n'est pas une lumière.

Faites une simulation. Dès 7 heures, de 5 en 5 minutes, dessinez les bus sur leur parcours et notez chaque fois que le bus de 8 heures (qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre) rencontre un bus tournant dans l'autre sens.

Voilà.

Deuxième méthode: peut-être aviez-vous un ancêtre cheminot, alors dessinez un horaire "professionnel", (*contribution D. Collignon*)



7. Problème 5: la différence de l'année

5 - LA DIFFÉRENCE DE L'ANNÉE

Mathilde écrit tous les nombres à quatre chiffres qui utilisent au moins une fois chacun des chiffres 2, 1 et 0 et seulement ceux-là, comme par exemple 1200 ou 2010. Elle calcule ensuite la différence entre le plus grand et le plus petit des nombres qu'elle a écrits.

Quelle est cette différence ? Note : Le premier chiffre d'un nombre à quatre chiffres n'est jamais un 0.

De nouveau un "gentil" problème où il suffit d'être précis et persévérant.

Après avoir lu 10 fois l'énoncé:

le plus grand nombre est 2210

le plus petit 1002

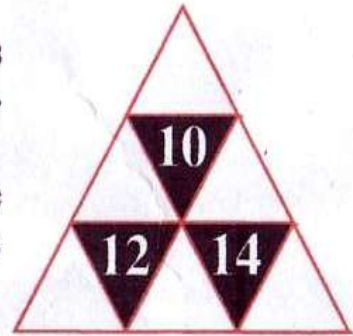
la différence **1208**.

8. Problème 6: pyramide logique

6 - PYRAMIDE LOGIQUE

Placez tous les chiffres de 1 à 6 dans les petits triangles blancs (un chiffre par triangle).

Le nombre inscrit dans chaque petit triangle noir doit être égal à la somme des trois chiffres qui l'entourent.



Un problème "honnête". Pas trop de choix possibles. Placer 1 au sommet de la pyramide, remarquer que les sommes inscrites sont paires, il faut donc placer autour de chaque triangle 2 chiffres impairs, un chiffre pair, essayer un peu, la solution n'est pas loin.

On s'adresse maintenant aux enfants de 10 à 11 ans,

9. Problème 7: le code

LE CODE

Chacun des chiffres de 1 à 6 est utilisé une fois pour former le code du coffre-fort de Picsou. Ce nombre à 6 chiffres est pair. Pour chaque paire de chiffres voisins, l'un est multiple de l'autre.

Quel est le code du coffre-fort ?

Placer à droite 2,4 ou 6. La position suivante (de droite à gauche) est de nouveau un chiffre pair (2,4 ou 6). Une troisième fois la même chose, mais maintenant il faut utiliser les chiffres impairs 1, 3 et 5. Essayez, ce n'est pas trop sorcier.

10. Problème 8: trois symboles à barrer

8 - TROIS SYMBOLES À BARRER

Barrez trois symboles dans l'expression suivante pour que le résultat donne 2010 :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7.$$

Note : Un symbole peut être un chiffre ou un signe $\times$. Si l'on barrait le signe $\times$ entre 2 et 3, par exemple, on lirait alors le nombre 23.

Laissez parler votre imagination. Pour donner un résultat de 2010, l'expression doit être un produit de facteurs dont un se termine par zéro. 30×67 ferait l'affaire. Alors biffez ce qu'il faut.

(on peut biffer le signe $\times$ à droite ou à gauche du 4, ça revient au même, on ne demande de toutes façons qu'une solution)

Pas encore trop difficile. Nous avons fait la première moitié des problèmes. Maintenant les problèmes vont se corser, A partir du problème 9, il pourra y avoir plus d'une solution. Finie la **dolce vita**. Les problèmes 9, 10 et 11 sont les problèmes les plus difficiles pour les élèves de 12 à 13 ans.

11. Problème 9: l'encyclopédie universalis

9 - L'ENCYCLOPÉDIE UNIVERSALIS

Les 28 tomes d'une encyclopédie Universalis sont rangés dans le désordre sur une étagère. Un mouvement consiste :

- avec une main, à sortir un tome
- avec l'autre main, à faire glisser latéralement, sans les sortir, d'autres tomes sur l'étagère
- à rentrer le tome sorti.

Dans la situation la plus défavorable, **en combien de mouvements, au minimum, l'encyclopédie peut-elle être rangée dans l'ordre, de gauche à droite, sur l'étagère ?**

Bien lire l'énoncé, ensuite implémenter la scène, jouer le jeu.

On peut commencer par 2 volumes, ensuite passer à 3, 4, ... n, et essayer de dégager une règle générale. Dans le cas le plus défavorable le nombre de mouvements est $(n-1)$

Donc s'il y a 28 volumes ...

Problème qui rappelle les temps héroïques des premiers ordinateurs, quand les données d'entrée étaient des tiroirs de cartes perforées qu'il fallait trier au moyen de machines spéciales: les trieuses.

12. Problème 10, Mastermind glissant

10 MASTERMIND GLISSANT

Dans cette variante du Mastermind, on cherche à deviner la position de 6 chiffres de 1 à 6, présents chacun une fois. A chaque coup, le joueur pose 4 pions numérotés et le meneur de jeu indique:

- un rond noir pour chaque chiffre présent dans les colonnes où un pion a été posé, et bien placé
- un rond blanc pour chaque chiffre présent dans les colonnes où un pion a été posé, et mal placé.

Retrouvez la position de chaque chiffre.

?	?	?	?	?	?
5	3	1	4		
	2	5	6	3	
		6	4	2	1

● ○ ○
● ○
○ ○ ○ ○

Première chose à faire, si vous ne le saviez pas, apprenez à jouer au Mastermind.

Allez sur Google et recherchez *Mastermind*. On vous apprend que le jeu a deux paramètres principaux: la largeur d'une ligne et le nombre de sortes de pions (couleur ou chiffre), dans notre cas les lignes ont une largeur de 6 et il y a 6 sortes de pions de 1 à 6. En plus on a ajouté une règle: on ne pose que 4 pions à la fois, se décalant d'une colonne à chaque essai.

Ensuite réfléchir.

Ligne 4 (inférieure), 6, 4, 3, 1 sont utilisés mais mal placés.

Ligne 3: 6 ou 2 sont bien placés, 5 et 3 doivent occuper les colonnes 1 ou 2, mais dans l'ordre 3,5 sinon ils auraient été déclarés juste en ligne 2. // vous me suivez ?

Hypothèse-1: c'est 6 qui est bien placé, 2 est mal placé;

ligne 2, c'est 1 qui est bien placé, reste à placer 1, 2 et 4. 1 ne peut pas aller en colonne 6, ni en colonne 1,2,4. Plaçons 1 en colonne 3.

Reste à placer 2 et 4. 2 doit aller en colonne 6.

D'où la solution: **3 5 1 6 4 2.**

Il n'y a pas de 2^{ème} solution.

13. Problème 11: Moitiés de sommes



Pas très gentil, 6 inconnues, 2 équations. C'est que l'on est au pays des problèmes plus difficiles.

$$(1) A = (B + CD) / 2 \text{ ou encore } 2 \cdot A = B + CD$$

$$(2) AC = (BE + FE) / 2 \text{ ou encore } 2 \cdot AC = BE + FE$$

// à défaut d'être génial, soyons persévérant, si CD vaut 12 et B=3, alors $A > 7$, prenons A=9

Si A=9, B=2, C=1, D=6 $\gg 18=2+16$, ok, mais $91 \cdot 2 \neq 2x+xy$
si x=8, $182-28 = 134$, $y > 10$, hypothèse fausse

Si A=9, B=4, C=1 $\gg 18=4+14$ D=4=B, pas possible

Si A=9, B=6, C=1, D=2 $\gg 18=6+12$, ok, mais $182=6x+yx$, pas possible

Même raisonnement pour A=8, ça ne marche pas

A=7, B=2, C=1, D=2=B, pas possible

B=4, C=1, D=0 $\gg 14=4+10$, ok, $2 \cdot 71=142=4x+xy$;

pour x=6 et y=9, $142=46+96$, ça marche, hurrah, donc

Une première solution 7 4 1 0 6 9

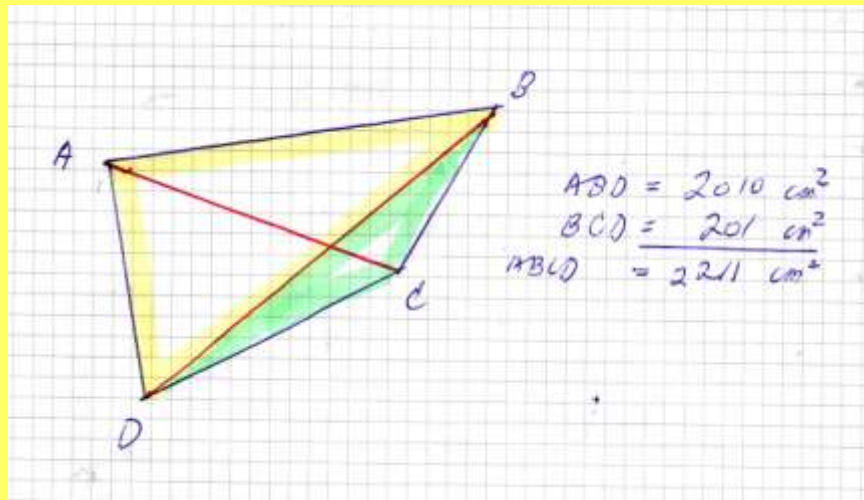
// reste à démontrer qu'il n'y a pas de 2^{ème} solution

14. Problème 12, le quadrilatère

12 LE QUADRILATÈRE

On trace un quadrilatère convexe, puis on considère les quatre triangles formés par trois de ses sommets. L'aire du plus grand de ces triangles est égale à 2010 cm^2 et celle du plus petit à 201 cm^2 .
Quelle est, au maximum, l'aire du quadrilatère, exprimée en cm^2 ?

Commencer par faire un dessin:



// c'est trop simple, probablement faux, erreur d'interprétation de l'énoncé ? Ou autre ?

Et pourtant, c'est juste.

Moralité: **avoir le courage de ses convictions.**

15. Problème 13: en sept coups de scie

13

EN SEPT COUPS DE SCIE

En sept coups de scie, sans déplacer les morceaux entre deux coups de scie, on a découpé un cube en parallélépipèdes rectangles dont l'aire totale vaut 500 cm^2 .
Quelle est la longueur en cm d'une arête du cube?

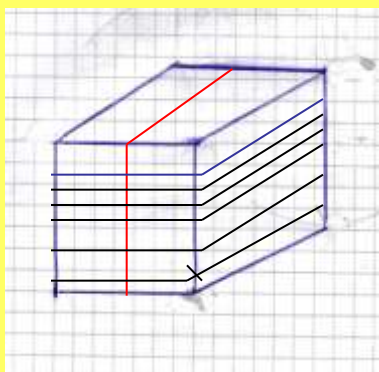


Patience et longueur de temps, font plus que force et que rage

Dessiner

De combien de façons différentes peut-on donner les 7 coups de scie ?

De 7 façons différentes:

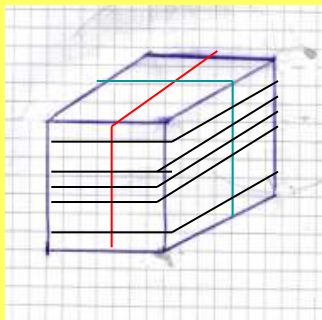


1. Découpe 1:0:6 x = arête du cube,
 $\text{aire}(\text{cube}) = 6 \cdot (x^2)$

14 para. $x : x/2 : x/7$

$$\begin{aligned}\text{aire}(1) &= 2 \cdot (x^2/2 + x^2/7 + x^2/14) \\ &= (10/7) \cdot (x^2)\end{aligned}$$

$$\text{aire}(\text{total}) = 14 \cdot \text{aire}(1) = \mathbf{20 \cdot (x^2)}$$

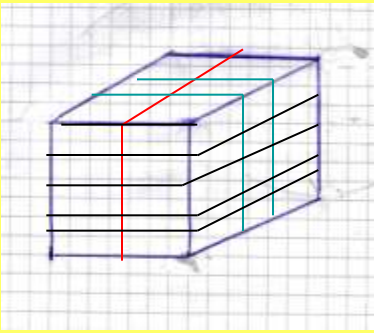


2. Découpe 1:1:5

24 parallélépipèdes $x/2 : x/2 : x/6$

$$\begin{aligned}\text{aire}(1) &= 2 \cdot (x^2/4 + x^2/12 + x^2/12) \\ &= (5/6) \cdot (x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{aire}(\text{total}) &= 24 \cdot (5/6) \cdot (x^2) = \mathbf{20 \cdot (x^2)} \\ &\text{// pure merveille}\end{aligned}$$

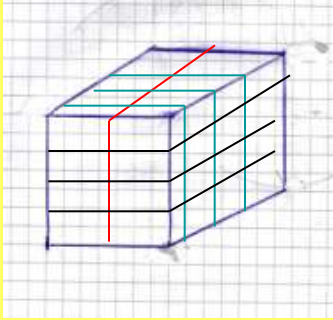


3. Découpe 1:2:4

30 paral. $x/2 : x/3 : x/5$

$$\text{aire}(1) = 2*(x^2/6 + x^2/10 + x^2/15) \\ = 2/3*x^2$$

$$\text{aire}(\text{total}) = (30*2/3)*x^2 = 20*(x^2) \\ // \text{ remarquable}$$

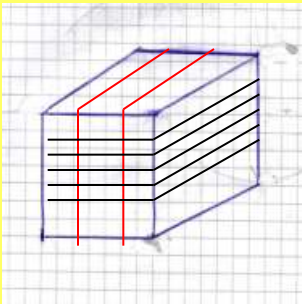


4. Découpe 1:3:3

32 paral. $x/2 : x/4 : x/4$

$$\text{aire}(1) = 2*(x^2/8 + x^2/8 + x^2/16) \\ = 5/8*x^2$$

$$\text{aire}(\text{total}) = (32*5/8)*x^2 = 20*(x^2) \\ // \text{ Ahoura Mazda, le Dieu unique se manifeste}$$

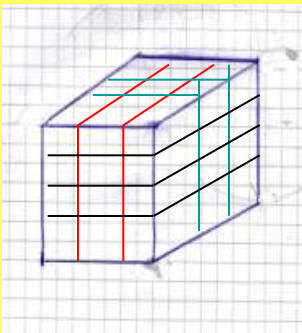


5. Découpe 2:0:5

18 paral. $x/3 : x : x/6$

$$\text{aire}(1) = 2*(x^2/3 + x^2/18 + x^2/6) \\ = 10/9*(x^2)$$

$$\text{aire}(\text{total}) = (18*10/9)*x^2 = 20*(x^2) \\ // \text{ Gott mit uns}$$

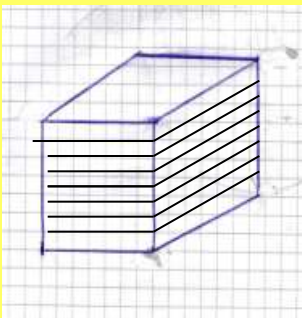


6. Découpe 2:2:3

36 paral. $x/3 : x/3 : x/4$

$$\text{aire}(1) = 2*(x^2/9 + x^2/12 + x^2/12) \\ = 5/9*(x^2)$$

$$\text{aire}(\text{total}) = (36*5/9)*x^2 = 20*(x^2) \\ // \text{ décidemment !}$$



7. Découpe 0:0:7

8 paral. $x : x : x/8$

$$\text{aire}(1) = 2*(x^2) + 4*(x^2)/8 = 20*(x^2)/8$$

$$\text{aire}(\text{total}) = 20*(x^2) = 20*(x^2)$$

// décidemment ce n'est pas le bon Dieu,
mais une raison logique

Pour conclure:

$$20 * (x^2) = 500 \quad ; \quad x=5$$

// peut-on imaginer une 2ème solution ?

A défaut d'une 2ème solution, voici une 2ème méthode:

Chaque coups de scie crée 2 surfaces de parallélépipèdes de x^2 , soit 14 surfaces, auxquelles s'ajoute la surface extérieure de $6*(x^2)$, en tout $20*(x^2)$

c.q.f.v. (ce qu'il fallait voir) !

C'est ici qu'intervient le facteur temps pour l'évaluation de l'intelligence. Celui qui voit en 20 secondes que la surface des parallépipèdes vaut $20*(x^2)$ est plus intelligent que celui qui le voit en 48 heures (c'est mon cas). Mais Il n'y a pas de honte de commencer par une méthode laborieuse.

17. Problème 15: Le grand nombre

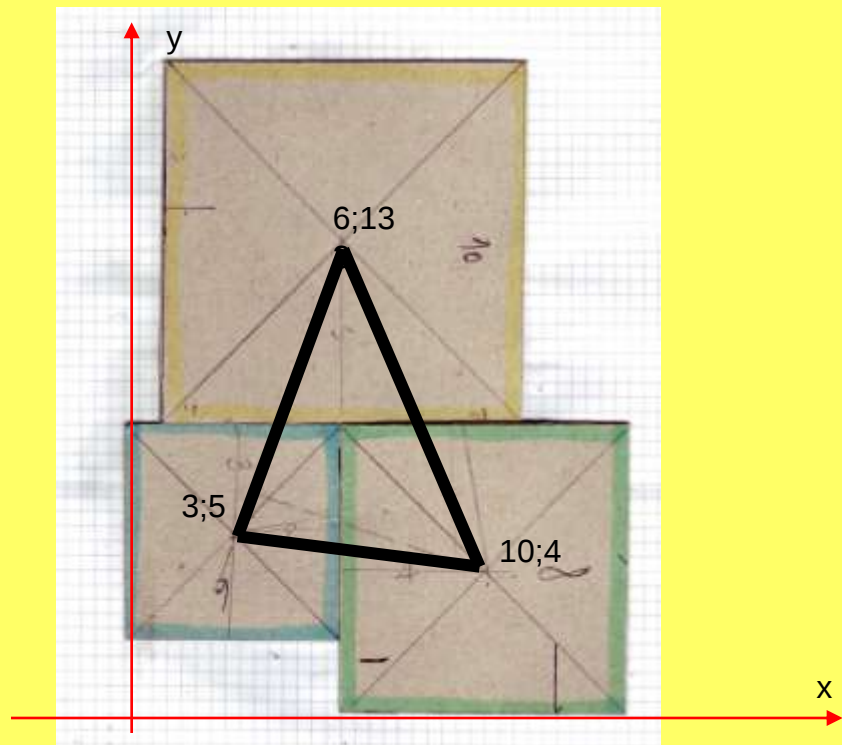
18. Problème 16: Les trois carrés

16 - LES TROIS CARRÉS

Mathilde dispose de trois carrés en cartons dont les côtés mesurent respectivement 6 cm, 8 cm et 10 cm.

Elle les pose sur une table sans chevauchement de telle façon qu'ils se touchent deux à deux.

Quelle est l'aire minimale du triangle formé par les centres des trois carrés ?



Découper 3 carrés en carton dans les dimensions données. Ensuite les présenter et chercher, intuitivement le minimum du triangle des centres. Calculer l'aire.

Plus professionnel serait d'écrire la surface du triangle en fonction du déplacement des petits carrés et chercher le minimum de cette fonction.

En attendant, calculons l'aire du triangle

$$a = \sqrt{90} = 9.5$$

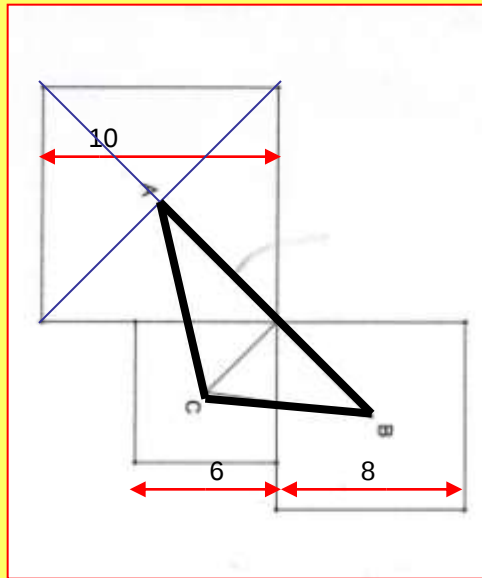
$$b = \sqrt{50} = 7.1$$

$$c = \sqrt{97} = 9.8$$

$$p = (a+b+c)/2$$

$$\text{aire} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 29.1$$

D. Collignon propose une autre disposition:



La base du triangle vaut $9 \cdot \sqrt{2}$

la hauteur $3 \cdot \sqrt{2}$

la surface = $27 \cdot 2 / 2 = 27$

C'est mieux que la valeur précédente, c'est la réponse juste.

Peut-on prouver que c'est vraiment le minimum ?

19. Problème 14: les nombres de Michel

17

LES NOMBRES DE MICHEL

Le premier chiffre à gauche d'un nombre de Michel est différent de 0 et du dernier chiffre à droite.

Lorsqu'on fait passer le chiffre des unités à la première place à gauche, sans changer l'ordre des autres chiffres, on obtient un multiple du nombre.

Quel est le plus petit nombre de Michel?

On connaissait les nombres premiers, pleins de fantaisie. Voici une nouvelle classe de nombres, il faut apprendre à jouer avec. Pour ça nous nous bricolons (avec Excel, excusez-moi) une machine à produire des nombres de Michel. Ce sera aussi une bonne occasion d'exercer la fonction Modulo (reste d'une division)

```
n1                // e.g. un nombre de 3 chiffres, 123
a= mod(n1,10)      // division modulo par 10, dans l'exemple 3
b= ent(n1/10)      // partie entière de n1/10, 12
n2=(100*a)+b       // donne 312, le chiffre de gauche apparaît
                   // à droite
```

Il faut en plus que n2 soit un multiple de n1

```
c= mod(n2,n1)
```

Si c= 0, alors n1 est un nombre de Michel.

Jouer le jeu pour des nombres de 2, 3, 4 ... chiffres jusqu'au moment où l'on trouve le premier nombre de Michel. Bonne chance

D. Collignon propose $n1=102564$

```
410256 = 102564 * 4    // bravo, contrôlez si c'est vraiment
                        // le plus petit. Quel est le nombre
                        // de Michel suivant ?
```

20. Problème 18: la farce du concierge

18

LA FARCE DU CONCIERGE

Pierre et Serge sont deux mathématiciens que leur concierge tente constamment de coller. Un 1er avril, ensemble, ils tombent nez à nez avec lui.

J'ai choisi deux nombres entiers entre 1 et 100 inclus, dit le concierge. Voici leur produit, dit-il à Pierre en lui donnant le papier. Et voici leur somme, dit-il à Serge en lui donnant l'autre papier. «Lequel de vous devinera-t-il ces nombres?»

«Ce produit ne me suffit pas», dit Pierre.

«Je le savais», dit Serge.

Le lendemain, le concierge avoue qu'il a inversé les papiers: en vérité, celui donné à Pierre mentionne la somme des nombres, et celui donné à Serge leur produit.

«Hélas, ce produit ne me suffit pas, mais je sais que Pierre le sait», dit Serge.

«Alors, j'ai deviné les nombres», dit Pierre.

«Moi aussi», dit Serge.

Quels sont, rangés dans l'ordre croissant, les deux nombres ?



Remarque: Le problème est difficile, il est destiné à la classe HC (Haute Compétition).

La difficulté est de transposer en expressions mathématiques (algèbre de Boole, théorie des ensembles) les affirmations du concierge, de Pierre et de Serge.

Est-ce encore une question de simple raisonnement (*un mélange judicieux de logique, de bon sens, de malice, de précision et de patience*) ?.

Je recopie ci-dessous l'analyse de D. Collignon.

Si vous ne comprenez pas tout dans ses moindres détails, nous irons boire ensemble le verre de la consolation.

Avant quelques considérations:

Le nombre de combinaisons simples de k (2) éléments pris dans un ensemble de n (100) éléments est de:

$$\text{CombiS}(2,100) = \frac{n!}{(k! \cdot (n-k)!)} = \frac{100!}{(2! \cdot 98!)} = \mathbf{4950}$$

Dans le cas de combinaisons à répétitions, on a:

$$\text{CombiR}(2,100) = \frac{(n+k-1)!}{((k!) \cdot ((n-1)!))} = \frac{101!}{(2! \cdot 99!)} = \mathbf{5050}$$

// la plus petite somme est **3** (1+2), la plus grande **199** (99+100)
 // le plus petit produit est **2** (1*2), le plus grand **9900** (99*100)

Réactions de Pierre et de Serge

"Ce produit ne me suffit pas", dit Pierre

"Je le savais", dit Serge.

Pierre regarde son billet, il y voit un nombre < 200, il croit que c'est un produit (voir suite de l'énoncé, Pierre ne sait pas encore que le nombre inscrit sur son billet n'est pas un produit mais la somme des deux nombres)

Quels sont les paires de nombres (de 1 à 100 inclus) dont le produit est égal ou inférieur à 199 ? Elles forment un ensemble $P2(n)$

$$P2(n) = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq y \leq 100 \mid x \cdot y = n \mid n < 200\}$$

1,1	...	1,99	99 possibilités
2,2	...	2,99	98
3,3	...	3,66	64
4,4	...	4,49	46
5,5	...	5,39	35
6,6	...	6,33	28
7,7	...	7,28	20
8,8	...	8,24	17
9,9	...	9,22	14
10,10	...	10,19	10
11,11	...	11,18	8
12,12	...	12,16	5
13,13	...	13,15	3
			Au total 438 possibilités

Pour chacune on peut calculer $n = x \cdot y$

Combien l'ensemble $P2(n)$ a-t-il d'éléments ? C'est la fonction « nombre de » ou appelée aussi « cardinal » (rien à voir avec le Cardinal de Richelieu), que nous désignerons par #

$p2(n) = \#(P2(n)) = 438$ // # pour «cardinal», «nombre de»

Combien il y a-t-il de nombres premiers <200 ? **46**

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83
89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173
179, 181, 191, 193, 197, 199

Ces 46 possibilités sont à éliminer, car sinon Pierre aurait répondu tout-de-suite au concierge. Par exemple pour un produit 137, nombre premier, la réponse de Pierre aurait été (1,137). Restent **392** possibilités,

Plusieurs valeurs de (x,y) , peuvent donner le même produit, d'où ambiguïté, hors Pierre pour conclure doit avoir un produit non ambigu.

Exemple

Pour $n=12$ $\{x,y\} = \{1,12 \setminus 2,6 \setminus 3,4\}$

Ce qui incite Pierre à dire: "*Ce produit ne me suffit pas*", dit Pierre , le nombre inscrit sur son billet n'est pas un nombre premier.

"*Je le savais*", dit Serge. Le nombre inscrit sur son billet n'est pas de la forme <nombre-premier>+1. Heureusement que Pierre et Serge connaissent par cœur les nombres premiers !

...
...
...

18 La farce du concierge

Notons s et p , respectivement la somme (reçue par Pierre) et le produit (reçu par Serge) des deux entiers compris entre 1 et 100 choisis par le concierge, et raisonnons pas à pas comme les deux logiciens.

Posons $P_n = \{(x, y) / 1 \leq x \leq y \leq 100 / x \times y = n\}$, $p_n = |P_n|$, $P = \{n / p_n \geq 2\}$ et $S = \{2 \leq n \leq 200 / \forall 1 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor / a \times (n - a) \in P\}$.

Remarque : $p_n = |D_n|$ où $D_n = \{d / n / \frac{n}{100} \leq d \leq \sqrt{n}\}$.

"s en tant que produit ne suffit pas à Pierre" signifie que $s \in P$. En particulier, Serge en déduit que s n'est pas de la forme :

1. kq où $q > 50$ premier et $k > 0$ entier ($p_{kq} = 0$ si $q > 100$ ou $k > 100$; sinon $p_{kq} = 1$ avec $k \times q$)
2. $q = 1$ ou premier ($p_q = 0$ si $q > 100$; sinon $p_q = 1$ avec $1 \times q$)
3. qr^2 où $q = 1$ ou premier, et $r > 10$ premier ($p_{qr^2} = 0$ si $r > 100$ ou $qr > 100$; sinon $p_{qr^2} = 1$ avec $r \times qr$)
4. $qr > 100$ où q premier et r premier ($p_{qr} = 0$ si $q > 100$ ou $r > 100$; sinon $p_{qr} = 1$ avec $q \times r$)

"Serge le savait" signifie que $p \in S$. D'après le raisonnement précédent, Pierre en déduit que p n'est pas de la forme :

1. $q + k$ où $q > 50$ premier et $k > 0$ entier, soit tout nombre supérieur à 54 à l'aide de $q = 53$.
2. $q + 1$ où $q = 1$ ou premier, soient 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30, 32, 38, 42, 44 et 48.
3. $(q + 1)r$ où $q = 1$ ou premier et $r > 10$ premier, soient 22 (2×11), 26 (2×13), 33 (3×11), 34 (2×17), 39 (3×13), 46 (2×23) et 51 (3×17).
4. $q + r$ où q premier, r premier et $qr > 100$, soient 28 ($5 + 23$ ou $11 + 17$), 36 ($5 + 31$ ou $7 + 29$ ou $13 + 23$ ou $17 + 19$), 40 ($3 + 37$ ou $11 + 29$ ou $17 + 23$), 50 ($3 + 47$ ou $7 + 43$ ou $13 + 37$ ou $19 + 31$) et 52 ($5 + 47$ ou $11 + 41$ ou $23 + 29$).

Réciproquement $p \in X \cup Z$ avec $X = \{9, 10, 15, 16, 21, 25, 27, 35, 45, 49\}$ et $Z = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53\}$. En effet pour $n \in X \cup Z$:

- $n - 1$ n'étant pas premier, alors $n = 1 + qr$ et $1 \times qr = q \times r$ avec $qr \leq 100$ et $1 < q \leq r$.
- pour n impair, $n = 2q + 2r + 1$ avec $1 \leq q \leq 50$ et $0 \leq r \leq 24$ alors $2q \times (2r + 1) = q \times 2(2r + 1)$ à la condition que $q \neq 2r + 1$.
- pour $n = q + r \leq 20$ avec $1 < q \leq r$, nous avons $1 \times qr = q \times r$.
- $53 = 2 + 51$, mais $2 \times 51 = 3 \times 34 = 6 \times 17$.
- $45 = 30 + 15$, mais $30 \times 15 = 5 \times 90 = 6 \times 75 = 9 \times 50 = 10 \times 45 = 18 \times 25$.
- $27 = 18 + 9$, mais $18 \times 9 = 2 \times 81 = 3 \times 54 = 6 \times 27$.
- $21 = 14 + 7$, mais $14 \times 7 = 1 \times 98 = 2 \times 49$.

"Le produit p ne suffit pas à Serge" permet à Pierre d'en déduire que $p \notin Z$ (les nombres premiers restants). Réciproquement $p \in X$. En effet tout $n \in X$ n'étant pas premier, alors $n = qr$ et $q \times r = 1 \times qr$ avec $qr \leq 100$ et $1 < q \leq r$.

"Serge sait que Pierre le sait" : Pierre en déduit que pour tout $(a, b) \in P_p$ et $(x, y) \in P_q$ tels que $x + y = a + b$, alors $q \notin Z$. Examinons alors les cas :

- $9 = 3 \times 3$ mais $3 + 3 = 1 + 5$ et $1 \times 5 \in Z$.
- $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$ mais $1 + 10 = 11$ et $2 + 5 = 7$ impossible car s serait alors premier.
- $15 = 3 \times 5$ ou $16 = 4 \times 4$ sont tels que $3 + 5 = 4 + 4 = 1 + 7$ avec $1 \times 7 \in Z$.
- $27 = 3 \times 9$ ou $35 = 5 \times 7$ sont tels que $3 + 9 = 5 + 7 = 1 + 11$ avec $1 \times 11 \in Z$.
- $45 = 5 \times 9$ ou $49 = 7 \times 7$ sont tels que $5 + 9 = 7 + 7 = 1 + 13$ avec $1 \times 13 \in Z$.

Réciproquement $p = 21$ ou 25 . D'où $s = 10, 22$ ou 26 .

"Pierre a deviné les nombres" signifie que $s \neq 10$ car sinon il hésiterait entre $(3, 7)$ et $(5, 5)$.

Les deux nombres sont donc $(1, 21)$ ou $(1, 25)$.

Note : Christian Romon fait remarquer que l'énoncé est bancal. A posteriori, Pierre était en mesure de deviner les nombres dès l'instant où le concierge a

avoué l'inversion puisque ni $38, 54, 68, 80, 90$ ou 98 ($s = 22$), ni $48, 69$ ou 88 ($s = 26$), ne font partie de la liste des valeurs possibles pour le produit de Serge ($p \in X \cup Z$).

21. Epilogue, bonheur et intelligence

L'homme cherche le bonheur, la douceur de vivre, la tranquillité, la paix. Que vient faire l'intelligence là-dedans ? La nature, merveille omniprésente, crée des êtres vivants capables de réfléchir. Non seulement regarder le monde, mais appréhender le pourquoi des choses, les liens, les relations de cause à effet, la complexité de l'univers, de la vie.

Dans cette prise de conscience, certains trouvent leur bonheur à explorer le monde des mathématiques, comme d'autres explorent les océans ou la forêt vierge.

Ce cahier devient une relation de voyage, chaque problème est un instant de bonheur, comme un coucher de soleil aux Caraïbes ou un bougainvillier en fleurs sur l'île de Kish.

Merci FFJM.

En plus, nous aimerions que ce cahier soit utilisé dans des lycées, des camps de vacances, des clubs d'amateurs pour inciter des jeunes à aimer, comme nous, les mathématiques.

22. Solutions

RÉPONSES DES 1/4 DE FINALES 2010

1 - LE JEU DE L'ANNÉE (coefficient 1)

5 coups

2 - LA BOUM (coefficient 2)

6

3 - ADDITION LITTÉRALE (coefficient 3)

DEUX ET DIX FONT DOUZE

4 - LES BUS (coefficient 4)

4 bus

5 - LA DIFFÉRENCE DE L'ANNÉE (coefficient 5)

1208.

6 - PYRAMIDE LOGIQUE (coefficient 6)



7 - LE CODE (coefficient 7)

513624

8 - TROIS SYMBOLES À BARRER (coefficient 8)

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ (plus un des deux signes $\times$ avant ou après le 4)

9 - L'ENCYCLOPÉDIE UNIVERSALIS (coefficient 9)

27 mouvements

10 - MASTERMIND GLISSANT (coefficient 10)

1 solution : 351642.

11 - MOITIÉS DE SOMMES (coefficient 11)

1 solution : 741069.

12 - LE QUADRILATÈRE (coefficient 12)

2211 cm².

13 - EN SEPT COUPS DE SCIE (coefficient 13)

1 solution : 5 cm

14 - L'ANAGRAMME SEXTUPLE (coefficient 14)

1386.

15 - LE GRAND NOMBRE (coefficient 15)

1 solution : 80

16 - LES TROIS CARRÉS (coefficient 16)

27 cm².

17 - LES NOMBRES DE MICHEL (coefficient 17)

102564.

18 - LA FARCE DU CONCIERGE (coef. 18)

2 solutions : (1 ; 21) ou (1 ; 25).