Solutions demi-finales suisses – 13.03.2010

Pascal Mauron, Wallisellen, L2, 14.03.2010

Problème 1

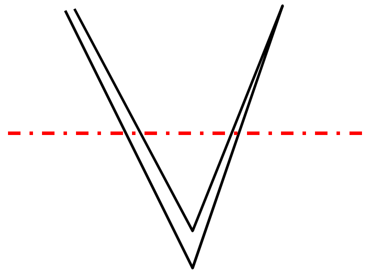
Sommes possibles en enlevant au plus deux allumettes:

Somme	Allumettes	Remarque
19	0	Impossible: Trop grand
15	1	Impossible: il ne faudrait enlever qu'une allumette (8+7) ou en ajouter (9+6)
14	2	Impossible: aucune allumette disponible pour adapter la partie gauche
13	1	Seule solution: 6+7 = 13
9	2	Impossible: aucune allumette disponible pour adapter la partie gauche

Problème 2

9 mètres.
Il est impossible de parcourir toutes les allées.

Problème 3



5 morceaux (les plis et la coupe ne se croisent pas).
Autre possibilité: plier en 4 à 90° et couper les coins libres, ce qui donne aussi 5 morceaux.

Problème 4

Yeux	2 têtes x 4 yeux	8
Oreilles	2 têtes x 3 oreilles	6
Cheveux	1 tête x 13 cheveux	13
Doigts (bras)	4 bras x 2 mains x 6 doigts	48
Doigts (pied)	1 jambe x 1 pied x 1 doigt	1
Total		76

Problème 5

Procédure	Résultat	Remarque
Somme des chiffres de 1 à 8	36	$\sum_{n=1}^{N} n \quad = \quad (N+1)\frac{N}{2}$
Somme par colonne	9	4 colonnes équivalentes
Paires possibles	4	1+8 – 2+7 – 3+6 – 4+5
Condition première ligne	15	1 + a + b + c
Possibilité 1	1+2+4+8	1 et 8 font partie de la même paire
Possibilité 2	1+2+5+7	2 et 7 font partie de la même paire
Possibilité 3	1+3+4+7	OK
Possibilité 4	1+3+5+6	3 et 6 font partie de la même paire

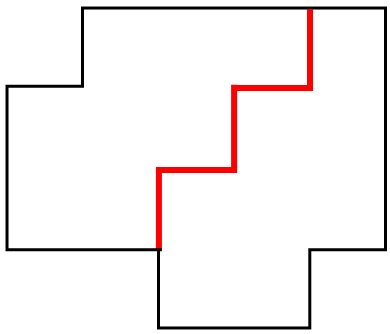
Problème 6

Alice a trois possibilités et Bertrand est automatiquement en face d'elle.
Le seul choix restant est laissé aux parents, son père pouvant être à sa gauche ou à sa droite.
Par conséquent: 3x2 = 6 possibilités

Problème 7

F. I. Kaas a marqué 20 buts de la tête et 40 du pied, soit un total de 60 buts.
Comme il a marqué exactement deux buts par match, son équipe a joué 30 parties.
Son équipe ayant joué deux parties contre chacune des autres, il y a 15 autres équipes.
Le total est par conséquent de 16 équipes.

Problème 8



Problème 9

Arthur: $A = 1010 + 3 \cdot t$

Béatrice: $B = 2010 - 13 \cdot t$

Croisement: $A = B \quad \Leftrightarrow \quad t = 62.5$

Différence: $B - A = 1000 - 16 \cdot t$

Le point de croisement étant à mi-chemin de deux nombres entiers, il y a deux solutions symétriques:

- t = 62 secondes: Béatrice prononcera "1204"
- t = 63 secondes: Béatrice prononcera "1191"

Problème 10

Intervalle	doubles				
	unités-dizaines	unités-centaines	dizaines-centaines	doubles	Total
1-100	10	0	0	0	10
101-200	10	10	10	2 (111)	28
201-300...					
901-999	9	10	10	2 (999)	27
Total	10 + 27x8 + 26				261

Il y a donc 999-261 = 738 habitations

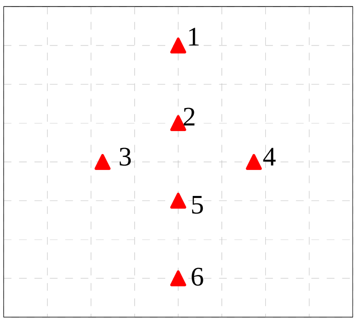
Problème 11

Comment peut-on obtenir 13 en additionnant les huit premiers entiers?

Nombre de chiffres	Combinaisons	Remarques
5	0	Trop grand: 1+2+3+4+5 = 15
4	3	1+2+3+7 – 1+2+4+6 – 1+3+4+5
3	6	1+4+8 – 1+5+7 – 2+3+8 – 2+4+7 – 2+5+6 – 3+4+6
2	2	5+8 – 6+7
Total	11	

Problème 12

La répartition suivante donne 12 triangles isocèles.



En numérotant les ocelles de haut en bas et de gauche à droite, on peut tracer les triangles isocèles suivants:
123 – 124 – 134 – 234 – 345 – 346 – 356 – 456 – 136 – 235 – 146 – 245

Problème 13

Deux remarques suffisent à régler ce problème:

- Le n[ième] chiffre n'est pas influencé par les termes précédents.
- Le sommes partielles ne peuvent dépasser 39, ce limite la "remontée" des retenues suivantes.

Position	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
2007	7										
2008	0	8									
2009	0	0	9								
2010	2	0	1	0							
2011		2	0	1	1						
2012			2	0	1	2					
2013				2	0	1	3				
2014					2	0	1	4			
2015						2	0	1	5		
2016							2	0	1	6	
2017								2	0	1	7
Reste									X	Y	<=39
Somme	0	1	2	3	4	5	6	7			

Problème 14

Pour répartir N lettres régulièrement par un espace k, il faut $(N-1)\cdot k+1$ jours.
Du 01.09.1945 et avril 1946, il y a entre 213 et 242 jours.
Par conséquent, l'intervalle peut être de 27, 28, 29 ou 30 jours, mais 5 dates sont possibles pour le mois d'octobre.

Intervalle	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	01.09	28.09	25.10	21.11	18.12	14.01	10.02	09.03	05.04
28	01.09	29.09	27.10	24.11	22.12	19.01	16.02	16.03	13.04
29	01.09	30.09	29.10	27.11	26.12	24.01	22.02	23.03	21.04
30	01.09	01.10	31.10	30.11	30.12	29.01	28.02	30.03	29.04

Problème 15

Il faut résoudre l'équation suivante: $x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} = 2010$

Pour simplifier les choses, définissons: $z = x+y$

Ce qui nous permet de définir l'inéquation: $(z-1)(z-2) < 4020$

Le déterminant de l'équation correspondante est: $\Delta = 9+4\cdot 4018 = 16081 \approx 16\cdot 100\cdot 10$

Ce qui nous donne une limite pour la racine positive: $z_{max} \approx \frac{3+125}{2} \approx 64$

z	$z-1$	$\frac{z-1}{2}$	$z-2$	$\frac{z-2}{2}$	$\frac{(z-1)(z-2)}{2}$	x	y	Remarques
65		32	63		2016	-6	71	x négatif
64	63			31	1953	57	7	OK
63		31	61		1891	119	-56	y négatif

Il n'y a qu'une solution: x = 57.

Problème 16

Une petite routine me donne 12 possibilités d'obtenir une liste de 19 chiffres, en partant par exemple de 269 ou de 667.
Je remercie d'avance la personne qui fournira une technique plus élégante que la force brute...

Problème 17

En procédant récursivement et en numérotant successivement les points du polygone à N côtés (soulignés en rouge, les doublons):

N	Triangles possibles	Combinaisons	Remarque
3	123	1	$\frac{1 \cdot 3}{3}$
5	124 – 235 – 341 – 452 – 513 134 – 245 – 351 – 412 – 523 135 – 241 – 352 – 413 – 524	5	$\frac{3 \cdot 5}{3}$
7	125 – 236 – 247 – 451 – 453 – 673 – 714 135 – 246 – 357 – 461 – 572 – 613 – 724 136 – 247 – 351 – 462 – 573 – 614 – 725 145 – 256 – 367 – 471 – 512 – 623 – 734 146 – 257 – 361 – 472 – 513 – 624 – 735 147 – 251 – 362 – 473 – 514 – 625 – 736	14	$\frac{6 \cdot 7}{3}$
9	...	30	$\frac{10 \cdot 9}{3}$

Le nombre de combinaisons possibles est donnée par: $K = \frac{a \cdot b}{3}$

Avec: $$a = \sum_{1}^{\frac{N-1}{2}} n = \frac{\frac{N-1}{2}+1}{2} \cdot \frac{N-1}{2} = \frac{N^2-1}{8}$$

$$b = N$$

Ce qui nous donne: $$K = \frac{N^2-1}{8} \cdot \frac{N}{3} = \frac{1002 \cdot 1000}{3 \cdot 8} \cdot 1001 = 334 \cdot 125 \cdot 1001 = 41'791'750$$

Problème 18

En géométrie vectorielle, on obtient: $$R \cdot \cos\varphi \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{R}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Où $\varphi = \frac{\pi}{7}$ est le demi angle au centre d'un des triangles de l'heptagone, et (x,y) définit le vecteur IJ.

La norme de ce vecteur vaut: $$\sqrt{x^2+y^2} = R \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\varphi + \cos^2\varphi - 2\cos^3\varphi}$$

Numériquement: $$\pi \approx \frac{22}{7}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{7}\right)^2 + \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{\pi}{7}\right)^4 \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{22}{49}\right)^2 + \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{22}{49}\right)^4 = 0.9009$$

Ce qui nous donne: $$IJ = \sqrt{x^2+y^2} \approx 70 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 0.9009 + 0.8116 - 1.4623} = 70 \cdot \sqrt{0.5002} \approx 35 \cdot \sqrt{2}$$

Ou encore: IJ = 495 mm