LES CHEMINS DU CERVEAU
Volume 4, mai 2010

Problèmes de la FFJM

Finales suisses 8 mai 2010

Claude Villars

Corrigé et complété par

Daniel Collignon
Christian Pralong

Version *provisoire* du 16.05.2010

Prologue:

Ce quatrième volume des ‘’Chemins du Cerveau’’ s’inscrit dans la ligne des trois volumes précédents. Toujours avec un minimum de philosophie personnelle, déviant parfois de l’orthodoxie de la FFJM:

• cerner les démarches qui mènent à la solution des problèmes,

• utiliser l’ordinateur pour les solutions ‘’laborieuses’’. Les solutions laborieuses (anglais *brute force*) sont celles qui demandent le moins d’intelligence, donc celles qui peuvent toucher le cercle le plus large d’intéressés. L’ordinateur est sans intelligence, l’intelligence vient du programmeur qui écrit les programmes. D’établir la logique du programme correspond à comprendre la logique de la solution, ce que je veux enseigner à mes petits-enfants. En plus mes petits-enfants apprennent l’usage d’un tableur, bonne introduction à l’étude de la programmation.

• établir un ‘’support de cours’’ pour tout enseignant qui aimerait transmettre les beautés et les jouissances des concours à ses élèves.

Remerciements:

Je ne remercierai jamais assez les personnes sans lesquelles mon étude serait impossible, spécialement MM. Christian Pralong et Daniel Collignon.

1 - ORDRE ALPHABÉTIQUE (coefficient 1)

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

Mathias écrit ces onze nombres en toutes lettres : zéro, un, deux, trois, ..., sur onze étiquettes.

Il classe ensuite ces étiquettes par ordre alphabétique : cinq, deux, dix, ...

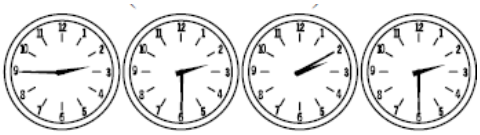
Quel nombre lira-t-on sur la huitième étiquette ?

Un problème de tri. Un genre de problèmes essentiel dès les débuts de l'informatique (trieuse de cartes perforées, …). L'étude des algorithmes de tri est fondamentale.

Triez à la main, ou écrivez une table et faites la trier par la fonction de tri.

1	cinq	cinq
2	deux	deux
3	dix	dix
4	huit	huit
5	neuf	neuf
6	quatre	quatre
7	sept	sept
8	six	six
9	trois	trois
10	un	un
11	zéro	zéro

2 - LES QUATRE PENDULES (coefficient 2)



Dans la salle où se déroule la finale (entre 14 heures et 15 heures), il y a quatre pendules. Le dessin montre ce qu'on voit sur ces pendules à un instant précis.On sait que l'une d'elles est arrêtée et que les trois autres fonctionnent. Parmi les trois qui fonctionnent, l'une retarde (de moins d'une heure), une autre indique l'heure exacte et la troisième avance (de moins d'une heure).

Quelle heure est-il à cet instant précis ?

Les horloges indiquent:

Horloge 1: 14:45
Horloge 2: 14:30
Horloge 3: 14:10
Horloge 4: 14:30

L'horloge qui avance doit être la no 1,
L'horloge qui retarde doit être la no 3,
Restent les no 2 et 4, pour celle qui indique l'heure juste et pour celle qui est arrêtée.

Il est donc 14:30.

3 - LES IMPAIRS (coefficient 3)

12345

Dans cette suite de chiffres, on peut lire exactement six nombres pairs, comme par exemple les nombres 2, 4, 12 ou 1234. **Combien peut-on lire de nombres impairs ?**
Note : on peut lire des nombres à un ou plusieurs chiffres, mais ceux-ci doivent alors se suivre, sans sauter de chiffre et dans l'ordre de lecture.

Pour se ''faire la main'', écrivons les 6 nombres pairs.
Les nombres pairs doivent se terminer par 2 ou 4

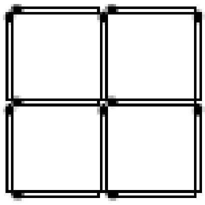
```
Se terminant par 2:  2, 12
Se terminant par 4:  4, 34, 234, 1234
Soit 6 nombres en tout
```

Appliquons la même méthode aux nombres impairs, ls doivent se terminer par 1, 3 ou 5

```
Se terminant par 1;  1
Se terminant par 3:  3, 23, 123
Se terminant par 5:  5, 45, 345, 2345, 12345
```

Soit 9 nombres en tout.

4 - PLUS AUCUN CARRÉ ! (coefficient 4)



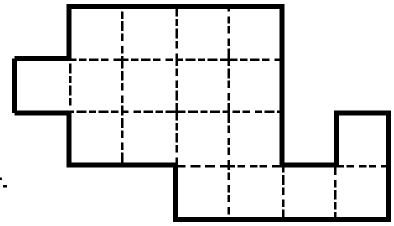
Avec 12 allumettes, Mathilde construit une figure qui contient 5 carrés : quatre petits et un grand. Si elle enlève n'importe quelle allumette, il ne reste plus que 3 carrés.
Combien doit-elle enlever d'allumettes en tout, au minimum, pour qu'il ne reste aucun carré ?

Au départ, il y a 12 allumettes, on en ôte une, il reste 3 carrés.

On ôte une deuxième allumette (11 possibilités), il reste toujours 2 carrés.

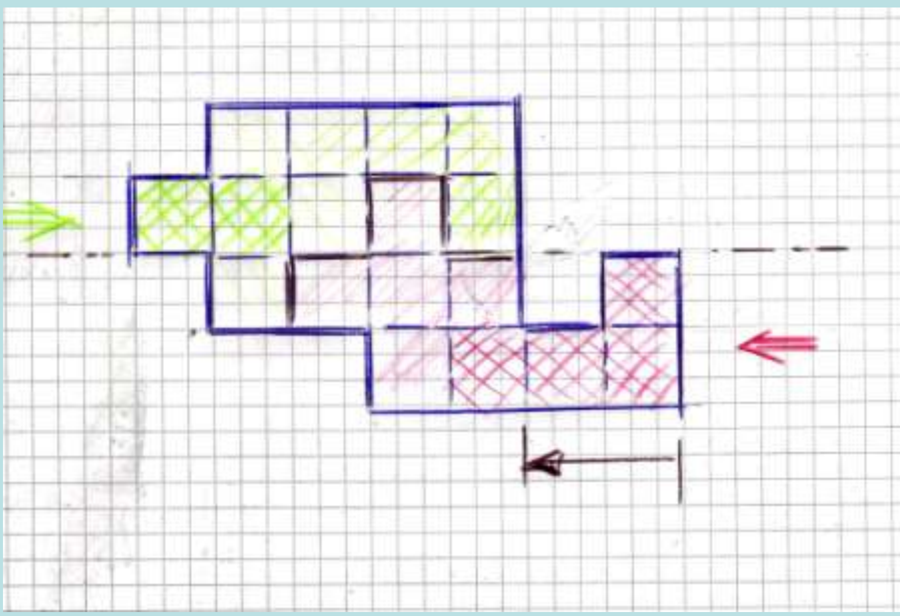
Alors ôtez une 3ème allumette. C’est joué.

5 - DÉCOUPAGE (coefficient 5)
Découpez cette figure en deux parties identiques en suivant les lignes du quadrillage.
Note : deux parties sont identiques si on peut les superposer, en retournant éventuellement l'une d'elles.



On compte les carrés, il y en a 18, donc chaque partie sera de 9 carrés.

La difficulté est de se représenter la partie retournée, celle que vous verriez dans un miroir.



Pas de recette miracle. Commencer depuis la droite (partie rouge) et depuis la gauche (partie verte). Essayer de reproduire le crochet.

Contrôler. On voit l'axe de symétrie et si on pousse la partie rouge de 2 carrés vers la gauche, les figures sont semblables.

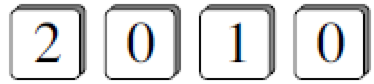
6 – A L'ÉCOLE DES SORCIERS (coefficient 6)
La bibliothèque de Poudlard possède beaucoup de livres.
Hermione en a compté 1988, Harry 2010 et Ron 2022.
« Vous vous êtes trompés, dit Dolores Ombrage, le plus proche du nombre exact se trompe de 7, le suivant de 15 et le dernier de 19 ».
Quel est le nombre exact de livres dans la bibliothèque ?

On considère:

```
2022  +-19  +-15  +-7
      2041  2037  029
      2003  2007  2015

2010  +-19  +-15  +-7
      2029  2025  2017
      1991  1995  2003

1988  +-19  +-15  +-7
      2007  2003  1995
      1969  1973  1981
```

Et la réponse saute aux yeux.

7 - LES JETONS DE L'ANNÉE (coefficient 7)
Mathias possède les quatre jetons représentés ci-contre. Il a formé le nombre 2010 en utilisant ses jetons. Il veut former tous les nombres possibles à 2, 3, ou 4 chiffres.

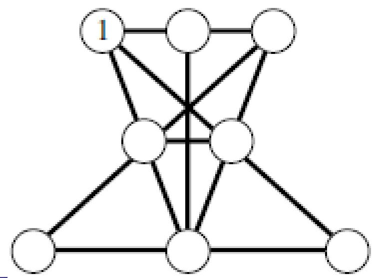


Combien peut-il en former, en comptant 2010 ?
Note : Un nombre à plusieurs chiffres ne commence jamais par un zéro.

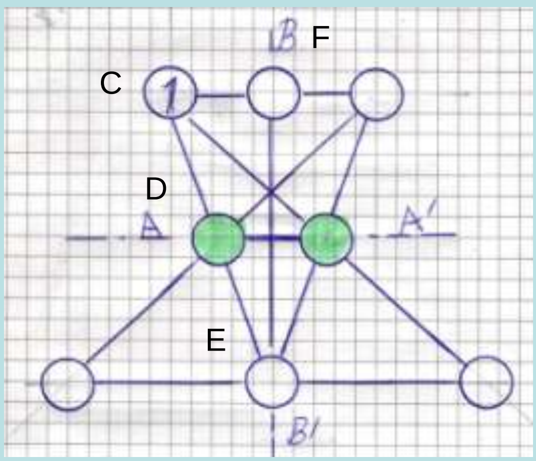
Nombres à 2 chiffres	20
	21
	10
	12
Nombres à 3 chiffres	200
	201
	210
	100
	102
	120
Nombres à 4 chiffres	2001
	2010
	2100
	1002
	1020
	1200

Reste à faire le compte: ***16***

8 - DE 1 À 8 (coefficient 8)
Placez les nombres de 2 à 8 dans les disques vides. La somme des deux ou trois nombres situés sur une même ligne droite doit toujours être égale à 12.



Voici un gentil problème, sans malice.



Il reste à placer les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Le long de l'axe AA', pour faire 12, on ne peut utiliser que 4/8, 8/4, 5/7 ou 7/5 soit 4 possibilités.

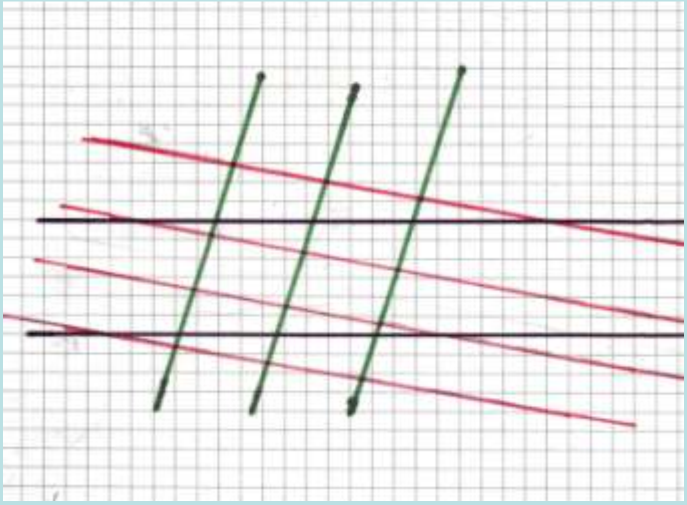
Placez en D successivement 4, 8, 5 et 7,

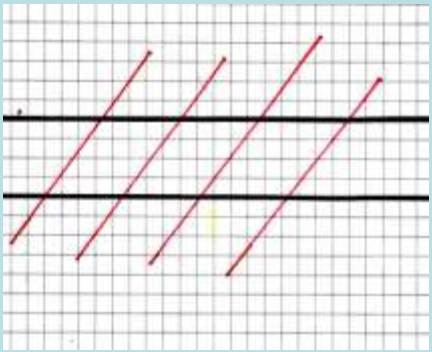
Remontez de E à F, contrôlez que E+F donne 12 et vous trouverez la solution:

```
       1 -- 8 -- 3

         7 ---- 5

      2 --  4  --  6
```

9 - LES PARALLÉLOGRAMMES (coefficient 9)
On trace 2 droites parallèles selon une première direction,
puis 3 droites parallèles selon une deuxième direction différente de la première et enfin 4 droites parallèles selon une troisième direction différente des deux précédentes.
Combien la figure finale compte-t-elle de parallélogrammes entièrement dessinés, au maximum ?

Evidemment, il faut dessiner, un dessin présentant le maximum de parallélogrammes.





Rouge/vert:	6 simples
	7 doubles
	2 triples
	2 quadruples
	1 sextuple
Noir/vert:	2 simples
	1 double
Rouge/Noir:	3 simples
	2 doubles
	1 triple
Total:	***27***

10 - ELEVEN (coefficient 10)
Eléna a trouvé un nombre entier non nul qu'elle a appelé « EleveN », car il est égal à 11 fois la somme de ses chiffres.
Quel est ce nombre ?

Un bon problème, on comprend l'énoncé sans difficultés, ensuite:

Le nombre cherché est un multiple de 11, supérieur à 99, inférieur à 999.

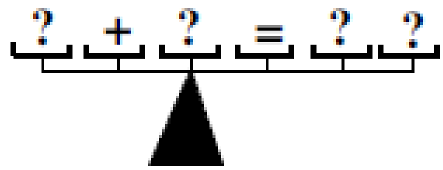
Ecrire les multiples, isoler les centaines, dizaines et unités. Les additionner. Si ce résultat est égal au multiplicande de 11, alors vous aurez trouvé la réponse.

Indiquez cette logique à un tableur, et les calculs se feront tout seuls et sans fautes.

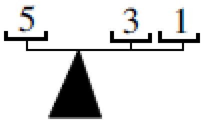
Eleven

		centain	diz&unite	dizaine	unite	cent+diz+unit	
11	1						
22	2						
33	3						
44	4						
55	5						
66	6						
77	7						
88	8						
99	9						
110	10	1	10	1	0	2	
121	11	1	21	2	1	4	
132	12	1	32	3	2	6	
143	13	1	43	4	3	8	
154	14	1	54	5	4	10	
165	15	1	65	6	5	12	
176	16	1	76	7	6	14	
187	17	1	87	8	7	16	
198	18	1	98	9	8	18	
209	19	2	9	0	9	11	
220	20	2	20	2	0	4	
231	21	2	31	3	1	6	
242	22	2	42	4	2	8	
253	23	2	53	5	3	10	
264	24	2	64	6	4	12	
275	25	2	75	7	5	14	
286	26	2	86	8	6	16	
297	27	2	97	9	7	18	
308	28	3	8	0	8	11	
319	29	3	19	1	9	13	

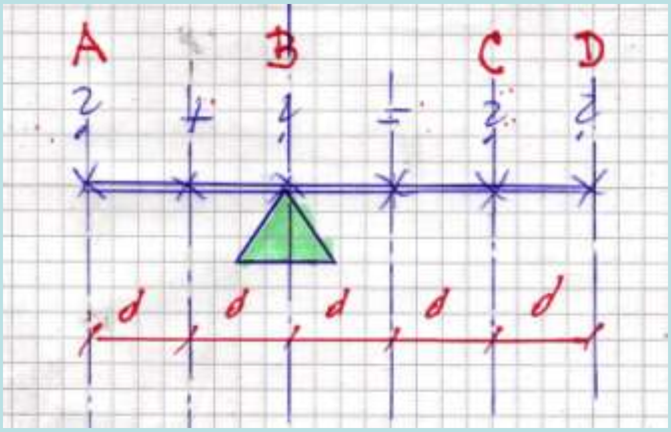
11 - DOUBLEMENT VRAI (coefficient 11)



On néglige le poids de tous les éléments constituant la balance de la figure, ainsi que celui des deux signes arithmétiques.
Les six plateaux (dont celui au sommet du socle triangulaire) sont régulièrement espacés. On dispose de plusieurs masses de chaque poids.
Remplacez chaque ? par une masse entière de 1 à 9 kilogrammes (un chiffre non nul) de façon que la balance soit en équilibre et que l'addition soit exacte (les deux « ? » de droite seront lus comme un nombre à deux chiffres)**.**
Dans l'exemple ci-contre, la balance est en équilibre car 1 x 5 = 1 x 3 + 2 x 1.



Attention, ALERTE ROUGE: le dessin de l'exemple ne correspond pas à celui de l'énoncé. L'EXEMPLE SERT UNIQUEMENT A EXPLIQUER L'EGALITE DES MOMENTS. Ça peut induire en erreur !!!




```
Appelons a, b, c, d les poids en A, B, C, D.

Equation des moments:
      a*2 = (c*2) + (d*3)    // b n'intervient pas
      a = (c*2 + d*3)/2      // a doit être entier

Equation arithmétique
      a + b = (10*c) + d
```

Une table est toujours un bon outil:

a, b, c, d les 4 poids recherchés			
c	d	a=(2c+3d)/2	b=10c+d-a
1	1	2.5	8.5
1	2	4	8
1	3	5.5	7.5

```
Choisir des valeurs pour c et d, a doit être un
entier.
```

```
Pour a = 4;  4 + b = 12;  b = 8  // c=1, d=2
```

12 - LA BALADE À VÉLO (coefficient 12)
Vincent vient de terminer un balade à vélo qui a duré trois heures et demie. Pendant toute période continue d'une heure, il a parcouru exactement douze kilomètres.
Quel est le nombre maximum de kilomètres qu'il a pu parcourir ?

Sainte horreur, j’ai atteint mon niveau d’incapacité.

En 3 heures, le cycliste a pu parcourir 36 km.

Mais qu’a-t-il fait pendant les 30 minutes ?

Bof.

13 - LE JEU DES CHIFFRES (coefficient 13)
Bernard et Mathias jouent au jeu suivant. Ils déposent chacun une mise de 8 euros au début du jeu.
A tour de rôle, ils écrivent un chiffre entre 1 et 6 (1 et 6 inclus, chaque chiffre pouvant être utilisé plusieurs fois). Bernard commence, puis ils jouent à tour de rôle.
A chaque fois que Mathias vient de jouer, on vérifie si le nombre formé par les chiffres écrits est un multiple de 9 ou non.
Si le nombre n'est pas un multiple de 9, Bernard prend 5 euros sur la mise et la partie continue. Si le nombre écrit est un multiple de 9, Mathias récupère le reste de la mise et la partie s'arrête.
Quel doit être le premier chiffre écrit par Bernard s'il veut être sûr de récupérer plus que sa mise, quel que soit le jeu de son adversaire ?

D'abord le premier tour:

```
Bernard: 1  Mathias 1…6  // jamais un multiple de 9
         2          1…6  // idem
         3           6   // multiple de 9, Mathias rafle la mise
         4           5   // idem
         5           4   // idem
         6           3   // idem
```

Au premier tour Bernard doit jouer 1 ou 2

Deuxième tour, ça se corse:

Le jeu des chiffres

Bernard 1er tour	Mathias 1er tour	Bernard 2ème tour	Mathias 2ème tour	N	N/9
1	1	1	1	1111	123.444444
1	1	1	2	1112	123.555556
1	1	1	3	1113	123.666667
1	1	1	4	1114	123.777778
1	1	1	5	1115	123.888889
1	1	1	6	1116	124
				0	0
				0	0
1	2	1	1	1211	134.555556
1	2	1	2	1212	134.666667
1	2	1	3	1213	134.777778
1	2	1	4	1214	134.888889
1	2	1	5	1215	135
1	2	1	6	1216	135.111111

Si Bernard joue 1 au 1er tour, Mathias a au moins 2 possibilités de rafler la mise, donc ***Bernard doit jouer 2***. Reste à prouver que Mathias ne peut en aucun gagner (compléter la table).

14 - QUATRE OPÉRATIONS (coefficient 14)
On additionne la somme, la différence (positive), le produit et le quotient de deux nombres entiers positifs non nuls. On obtient 450.
Quels sont les deux entiers ?

```
Soit a et b les 2 nombres à trouver;
(a+b) + (a-b) + (a*b) + (a/b) = 450
a = (450*b)/(b*b + 2*b + 1)
// porter a et b dans une table
```

Quatre opérations

a	b
1	112.5
2	**100**
3	84.375
4	**72**
5	62.5
6	55.1020408
7	49.21875
8	44.4444444
9	40.5
10	37.1900826
11	34.375
12	31.9526627
13	29.8469388
14	**28**
15	26.3671875
16	24.9134948
17	23.6111111
18	22.4376731
19	21.375
20	20.4081633
21	19.5247934

15 - LES PRODUITS (coefficient 15)
En utilisant les nombres 1, 2, 3, ..., 19, 20, on forme tous les produits possibles de deux nombres différents et on liste les résultats pairs tous différents.
Combien de ces résultats sont divisibles par 3 ?

Il y a probablement une méthode ‘’élégante’’. Comme nous ne sommes pas sur-doués, nous préférons la méthode ‘’laborieuse’’, elle permet de mieux disséquer la logique du problème, une table va nous aider.

Les produits

a	b	a*b	(a*b)/3	
1	2	2	0.66666667	
1	4	4	1.33333333	
1	6	6	2	1
1	8	8	2.66666667	
1	10	10	3.33333333	
1	12	12	4	1
1	14	14	4.66666667	
1	16	16	5.33333333	
1	18	18	6	1
1	20	20	6.66666667	
2	1	2	0.66666667	
2	2	4	1.33333333	
2	3	6	2	
2	4	8	2.66666667	
2	5	10	3.33333333	
2	6	12	4	
2	7	14	4.66666667	
2	8	16	5.33333333	
2	9	18	6	
2	10	20	6.66666667	
2	11	22	7.33333333	
2	12	24	8	1
2	13	26	8.66666667	
2	14	28	9.33333333	
2	15	30	10	1
2	16	32	10.6666667	
2	17	34	11.3333333	
2	18	36	12	1
2	19	38	12.6666667	
2	20	40	13.3333333	
3	4	12	4	
3	6	18	6	
3	8	24	8	
3	10	30	10	
3	12	36	12	
3	14	42	14	1
3	16	48	16	1
3	18	54	18	1
3	20	60	20	1
4	5	20	6.66666667	
4	6	24	8	
4	7	28	9.33333333	
4	8	32	10.6666667	
4	9	36	12	
4	10	40	13.3333333	
4	11	44	14.6666667	
4	12	48	16	
4	13	52	17.3333333	
4	14	56	18.6666667	
4	15	60	20	

page 1

Les produits

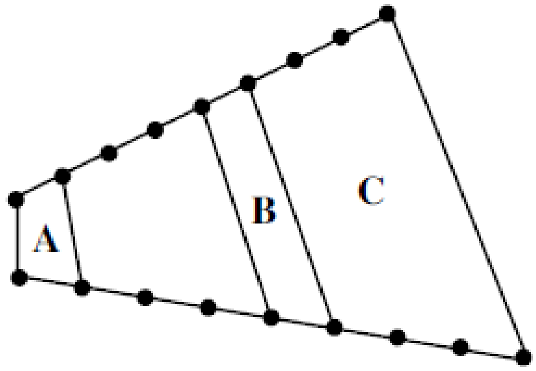
4	16	64	21.3333333	
4	18	72	24	1
4	20	80	26.6666667	
5	6	30	10	
5	8	40	13.3333333	
5	10	50	16.6666667	
5	12	60	20	
5	14	70	23.3333333	
5	16	80	26.6666667	
5	18	90	30	1
5	20	100	33.3333333	
6	7	42	14	
6	8	48	16	
6	9	54	18	
6	10	60	20	
6	11	66	22	1
6	12	72	24	
6	13	78	26	1
6	14	84	28	1
6	15	90	30	
6	16	96	32	1
6	17	102	34	1
6	18	108	36	1
6	19	114	38	1
6	20	120	40	1
7	8	56	18.6666667	
7	10	70	23.3333333	
7	12	84	28	
7	14	98	32.6666667	
7	16	112	37.3333333	
7	18	126	42	1
7	20	140	46.6666667	
8	9	72	24	
8	10	80	26.6666667	
8	11	88	29.3333333	
8	12	96	32	
8	13	104	34.6666667	
8	14	112	37.3333333	
8	15	120	40	
8	16	128	42.6666667	
8	17	136	45.3333333	
8	18	144	48	1
8	19	152	50.6666667	
8	20	160	53.3333333	
9	10	90	30	
9	12	108	36	
9	14	126	42	
9	16	144	48	
9	18	162	54	1
9	20	180	60	1
10	11	110	36.6666667	

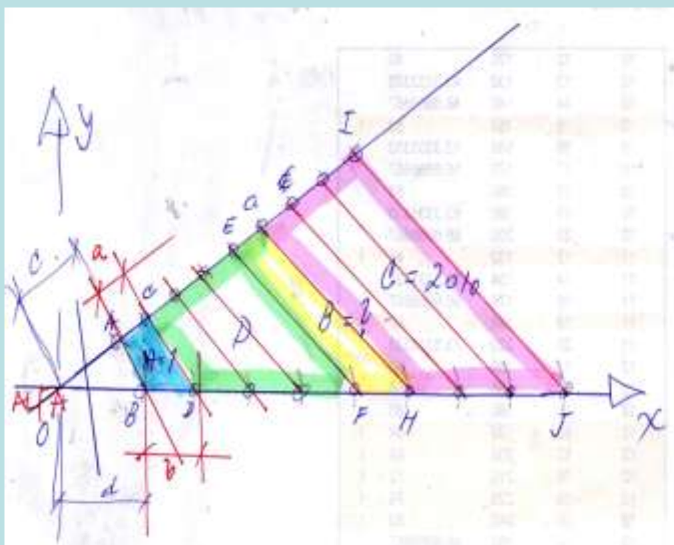
page 2

Les produits

10	12	120	40	
10	13	130	43.3333333	
10	14	140	46.6666667	
10	15	150	50	1
10	16	160	53.3333333	
10	17	170	56.6666667	
10	18	180	60	
10	19	190	63.3333333	
10	20	200	66.6666667	
11	12	132	44	1
11	14	154	51.3333333	
11	16	176	58.6666667	
11	18	198	66	1
11	20	220	73.3333333	
12	13	156	52	1
12	14	168	56	1
12	15	180	60	
12	16	192	64	1
12	17	204	68	1
12	18	216	72	1
12	19	228	76	1
12	20	240	80	1
13	14	182	60.6666667	
13	16	208	69.3333333	
13	18	234	78	1
13	20	260	86.6666667	
14	15	210	70	1
14	16	224	74.6666667	
14	17	238	79.3333333	
14	18	252	84	1
14	19	266	88.6666667	
14	20	280	93.3333333	
15	16	240	80	
15	18	270	90	1
15	20	300	100	1
16	17	272	90.6666667	
16	18	288	96	1
16	19	304	101.333333	
16	20	320	106.666667	
17	18	306	102	1
17	20	340	113.333333	
18	19	342	114	1
18	20	360	120	1
19	20	380	126.666667	
			Total:	***43***

16 - LES QUATRE CHAMPS (coefficient 16)
Sur chacune des deux routes en ligne droite, des poteaux (points) sont régulièrement espacés.
L'aire du champ A est prise pour unité.
Celle du champ C est 2010 (la figure ne respecte pas les proportions).
Quelle est l'aire du champ B ?





A première vue, le système présente 5 degrés de liberté:

alfa, a, b, c, d

La contrainte aire(**C**)= 2010*aire(**A**) en réduira le nombre
Surface d'un triangle: aire(triangle)= c* d* sin(alfa)/2

```
[eq1]
aire(A)=((a+c)*(d+b)*sinus(alfa)/2         // triangle OCD
         - (c*d*sinus(alfa)/2)             // triangle OAB

[eq2]
aire(C)=((8*a+c)*(8*b+d)*sinus(alfa)/2     // triangle OIJ
         - ((5*a+c)*(5*b+d)*sinus(alfa)/2) // triangle OGH
```

```
[eq3]
aire(B)=((5*a+c)*(5*b+d)*sinus(alfa)/2      // triangle OGH
        - ((4*a+c)*(4*b+d)*sinus(alfa)/2)   // triangle OEF
```

Und jetzt ?

x = 2010 * {5 …)/(8 …)}

??? Hilfe

17 - LES TIRELIRES (coefficient 17)

Mathilde possède un certain nombre de tirelires. Elle s'amuse à calculer la somme (un nombre entier d'euros) contenue dans chaque paire de tirelires et elle note les nombres d'euros obtenus.

Elle obtient les nombres 40, 48, 62, 78, 92, 100 et 130.

Certains de ces nombres apparaissent deux fois, mais aucun trois fois.

Trouvez combien de tirelires possède Mathilde et les sommes qu'elles contiennent, rangées en ordre croissant.

18 - LE JARDIN DE TRINITÉ (coefficient 18)
Le jardin de Trinité est un triangle dont un angle mesure le double d'un autre, et dont le troisième est obtus.
Les trois côtés mesurent des nombres entiers de mètres.
Quel est, au minimum, le périmètre du jardin de Trinité ?