Finales régionales

Daniel Collignon

8 mai 2010

1 Ordre alphabétique

Construisons un tableau permettant de réaliser le tri alphabétique (lorsque l'initiale est en double, la deuxième lettre suffit à départager ici).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lettre	Z	U	De	T	Q	C	Si	Se	H	N	Di
rang	11	10	2	9	6	1	8	7	4	5	3

Le 8ème rang est occupé par le nombre 6.

2 Les quatre pendules

Il ne peut etre ni 14h45, ni 14h10 car il y a une pendule qui avance (qui ne peut être que 14h45) et une autre qui retarde (qui ne peut être que 14h10). Il est donc 14h30.

3 Les impairs

Trois façons de parvenir au même résultat.
Première méthode : nombres impairs par taille

nombre de chiffres	1	2	3	4	5
nombres impairs	1,3,5	23,45	123,345	2345	12345

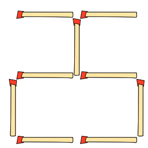
Deuxième méthode : nombres impairs par chiffre des unités

chiffre des unités	1	3	5
nombres impairs	1	3,23,123	5,45,345,2345,12345

Troisième méthode : il y a 5 nombres à 1 chiffres, 4 à 2 chiffres, ..., 1 à 5 chiffres, soit $5+4+\cdots+1=15$ nombres en tout ; un nombre est soit pair, soit impair ; en faisant confiance à l'énoncé, 6 sont pairs, donc $15-6=9$ seront impairs.

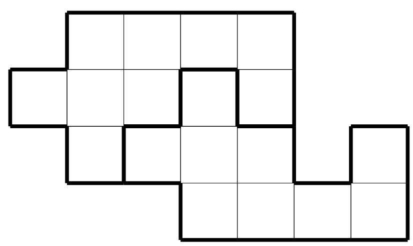
4 Plus aucun carré !

Pour éliminer le grand carré, il est nécessaire d'enlever 1 allumette du contour. Il reste alors 3 petits carrés dont 2 sont disjoints nécessitant au moins 2 allumettes. Ce minimum de 3 allumettes est atteint comme le montre l'exemple.



5 Découpage

L'idée est de reproduire le « crochet » (à droite) retourné, une fois convaincu qu'on n'y arrive pas sans.



6 A l'école des sorciers

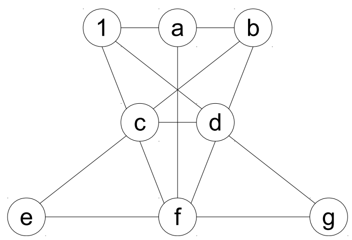
Le nombre est nécessairement compris entre $2022-19=2003$ et $1988+19=2007$. Seul 2010 peut alors être à une distance de 7, et nous en déduisons que la bibliothèque compte 2003 livres.

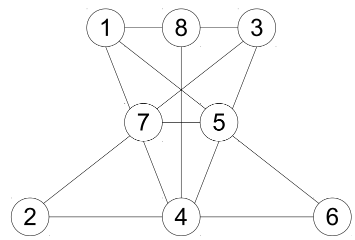
7 Les jetons de l'année

Il y a 2 possibilités pour choisir le premier chiffre (1 ou 2). Il reste 2 choix pour le deuxième chiffre (0 ou le chiffre non nul restant). Il y a donc 4 nombres à 2 chiffres : 10, 12, 20, 21. Si le deuxième chiffre vaut 0, alors il reste 2 possibilités pour le troisième chiffre (0 ou le chiffre non nul restant) ; sinon le troisième chiffre est nécessairement 0. Il y a donc 6 nombres à 3 chiffres : 100, 102, 120, 200, 201, 210. Le dernier chiffre est imposé et il y a donc 6 nombres à 4 chiffres : 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100. Mathias peut donc former $4+6+6=16$ nombres.

8 De 1 à 8

Nous avons $1+a+b+c+d+e+f+g+3f=48$ en additionnant les 4 sommes impliquant f. Par ailleurs, $1+a+b+c+d+e+f+g=1+\cdots+8=36$, d'où $f = 4$ par différence et le reste se complète aisément.





9 Les parallélogrammes

Dans le cas de a droites parallèles selon une direction et b droites parallèles selon une autre direction, nous montrons qu'il y a $C_a^2 C_b^2$ parallélogrammes entièrement dessinés au maximum (pour s'en convaincre il suffit de remarquer que le choix de 2 droites parallèles selon une direction et 2 droites parallèles selon l'autre direction détermine de manière unique tout parallélogramme). Pouvant choisir de $C_3^2 = 3$ façons 2 directions parmi 3, il y a donc 3 types de parallélogrammes et la figure compte au maximum $C_2^2 C_3^2 + C_3^2 C_4^2 + C_4^2 C_2^2 = 3 + 18 + 6 = 27$ parallélogrammes entièrement dessinés.

10 Eleven

Cherchons un entier $n > 0$ tel que $n = 11s\left(n\right)$ où $s\left(n\right)$ désigne la somme des chiffres de n. Puisque $n \equiv s\left(n\right) \pmod 9$, nous en déduisons $s\left(n\right) \equiv 0 \pmod 9$ et donc $n \equiv 0 \pmod{99}$. Si n a $c \geqslant 2$ chiffres, nous avons $10^{c-1} \leqslant n = 11s\left(n\right) \leqslant 11 \cdot 9c < 100c$, inégalité qui n'est plus vérifiée dès que $c \geqslant 4$. Pour $c \leqslant 3$, nous avons $n \leqslant 11s\left(999\right) = 297$, puis en itérant, $n \leqslant 11s\left(199\right) = 209$. Il ne reste plus qu'à vérifier les 2 premiers multiples de 99, pour en déduire que 198 forme l'unique solution.

i	1	2
$n = 99i$	99	198
$s\left(n\right)$	18	18
$11s\left(n\right)$	198	198
$n = 11s\left(n\right)$?	non	oui

11 Doublement vrai

Notons $a + b = 10c + d$ l'addition à reconstituer avec $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 9$. La relation $2a = 2c + 3d$ traduit l'équilibre. Puisque $a + b \leqslant 18$, nous en déduisons $c = 1$. D'où $a = 1 + \frac{3d}{2}$ et $b = 9 - \frac{d}{2}$, nécessitant d pair. La condition sur a entraîne $d = 2$ ou 4, d'où les 2 égalités $4 + 8 = 12$ et $7 + 7 = 14$ (la répétition est autorisée, disposant de plusieurs masses de chaque poids).

12 La balade à vélo

La durée de la balade se décompose en trois heures continues où Vincent a parcouru exactement $12 \times 3 = 36$ km, plus une demi-heure où il ne peut avoir parcouru plus de 12 km. La configuration périodique (de période une heure) où il réalise 12 km sur une demi-période permet d'atteindre le maximum de 48 km (le kilométrage par demi-heure est 12-0-12-0-12-0-12).

13 Le jeu des chiffres

Grâce à la preuve par 9, il est plus simple de regarder la somme des chiffres écrits. Pour récupérer plus que sa mise de 8 €, Bernard doit aller au moins jusqu'au troisième tour. Si Bernard commence par 3, 4, 5 ou 6, alors en complétant à 9 Mathias gagne dès le premier tour. Si Bernard commence par 1 et que Mathias répond par 1, alors au deuxième tour, Mathias joue le complément à 7 de Bernard et gagne. Enfin, si Bernard commence par 2, quel que soit le choix de Mathias, il répond au deuxième tour par le complément à 7 lui assurant un troisième tour ; pour sauver l'honneur Mathias adopte la même stratégie en répondant 2, puis en jouant au troisième tour le complément à 7 de Bernard. La meilleure stratégie pour Bernard est donc de commencer par 2.

14 Quatre opérations

Notons $a > b > 0$ les 2 entiers. Comme $0 < \frac{b}{a} < 1$ n'est pas entier, pour le quotient il s'agit forcément de $\frac{a}{b} = c$. L'addition des quatre opérations s'écrit $a + b + a - b + ab + \frac{a}{b} = 450$ ou encore $c(1 + b)^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, d'où les 3 solutions.

$1+b$	c	a	b
3	50	100	2
5	18	72	4
15	2	28	14

15 Les produits

Les résultats pairs et divisibles par 3 sont des multiples de 6.
Première méthode : les résultats sont de la forme $p \times q$ où $1 \leqslant p, q \leqslant 20$ et $(p, q) = (3\,(2m-1)\,, 2n)$ ou $(6m, n)\,.$
Considérons les ensembles $E_{3(2m-1)} = \{3\,(2m-1) \times 2n / 1 \leqslant n \leqslant 10\}$ et $E_{6m} = \{6m \times n / 1 \leqslant n \leqslant 20 / n \neq 6m\}$ pour $m = 1, 2$ ou 3.
Pour simplifier un peu, remarquons que $E_3 \cup E_6 = \{6 \times n / 1 \leqslant n \leqslant 20\}$ et que $E_9 \subset E_{18}$.
A ce stade, on peut appliquer la formule de Poincaré (un peu laborieux avec encore 4 ensembles) ou lister les apports stricts de chaque ensemble : nous avons des multiples de 6, 12, 30 ou 18, aussi commençons par déterminer les multiples

de 6, non multiples de 12, 30 ou 18, c'est-à-dire les $n \in \{1, \ldots, 20\}$ tels que $n \not\equiv 0 \pmod{2,\ 3 \text{ ou } 5}$: $\{1, 7, 11, 13, 17, 19\}$.
Puis déterminons les multiples de 12, non multiples de 30 ou 18, c'est-à-dire les $n \in \{1, \ldots, 20\} \backslash \{12\}$ tels que $n \not\equiv 0 \pmod{3 \text{ ou } 5}$: $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$.
Ensuite déterminons les multiples de 30, non multiples de 18, c'est-à-dire les $n \in \{1, \ldots, 10\}$ tels que $n \not\equiv 0 \pmod 3$: $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$.
Enfin il reste les multiples de 18, c'est-à-dire les $n \in \{1, \ldots, 20\} \setminus \{18\}$.
Nous avons en tout $6 + 11 + 7 + 19 = 43$ résultats différents.
Deuxième méthode : le plus petit résultat étant $6 = 6 \times 1$ et le plus grand $360 = 18 \times 20$, il s'agit de dénombre les résultats $6k$ avec $1 \leqslant k \leqslant 60$ pouvant être obtenus.
Les résultats $6k$ ne sont pas atteints lorsque k est de la forme :

- p avec $p > 20$ premier, soit $k \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59\}$
- $2p$ avec $p > 20$ premier, soit $k \in \{46, 58\}$
- $4p$ avec $p > 10$ premier, soit $k \in \{44, 52\}$
- $5p$ avec $p > 10$ premier, soit $k \in \{55\}$
- $6p$ avec $p = 9$, 18×18 étant interdit, soit $k \in \{54\}$
- $7p$ avec $p \geqslant 7$, soit $k \in \{49, 56\}$

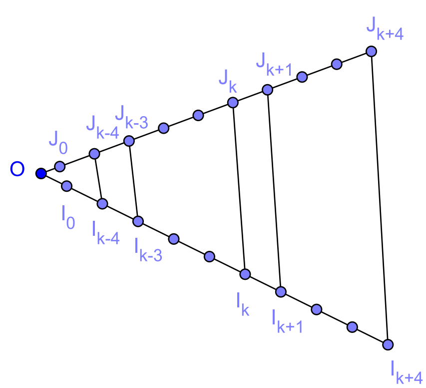
Réciproquement, tous les résultats suivants sont atteints :

- $6 \times p$ soit $k = p$ pour $p \in \{1, \ldots, 20\} \setminus \{6\}$
- $6 \times 2p = 12 \times p$ soit $k = 2p$ pour $p \in \{1, \ldots, 20\} \setminus \{12\}$
- $6 \times 3p = 18 \times p$ soit $k = 3p$ pour $p \in \{1, \ldots, 20\} \setminus \{18\}$
- $6 \times 5p = 15 \times 2p$ soit $k = 5p$ pour $p \in \{1, \ldots, 10\}$

Il y a donc $60 - 17 = 43$ résultats différents.

16 Les quatre champs

Notons $\alpha = \widehat{I_0OJ_0}$, $x = OI_0$, $y = OJ_0$, $i = I_0I_1$ et $j = J_0J_1$.
L'aire du triangle I_nOJ_n vaut $a_n = \frac{OI_nOJ_n \sin\alpha}{2}$ où $OI_n = x+ni$ et $OJ_n = y+nj$.



Alors $A = a_{k-3} - a_{k-4} = 1$, $B = a_{k+1} - a_k$ et $C = a_{k+4} - a_{k+1} = 2010$.
En développant, $\frac{2A}{\sin\alpha} = yi + xj + ij\,(2k - 7) = \frac{2B}{\sin\alpha} - 8ij = \frac{2C}{3\sin\alpha} - 12ij$.
Enfin, nous vérifions que $9B = 3A + 2C$, d'où $B = 447$.

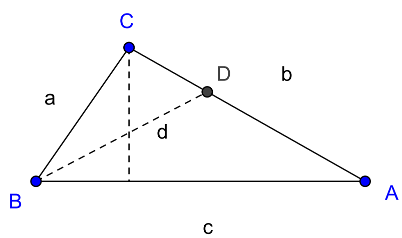
17 Les tirelires

Il y a donc 7 sommes distinctes. D'après le principe des tiroirs il ne peut y avoir plus de 14 sommes car sinon l'une d'elle se répéterait au moins trois fois. Comme il y a C_t^2 façons de choisir une paire parmi t tirelires, il y a autant de sommes possibles, et nous en déduisons $7 < C_t^2 \leqslant 14$, d'où $t = 5$. Il y a donc 3 sommes qui se répètent 2 fois. Ordonnons les tirelires par contenu croissant $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4 \leqslant t_5$ et représentons également les sommes dans l'ordre croissant (horizontalement et verticalement). Nous en déduisons que $t_1+t_2 = 40$, $t_1+t_3 = 48$, $t_3+t_5 = 100$ et $t_4+t_5 = 130$. De plus $t_1+t_4 = (t_1+t_3)+(t_4+t_5)-(t_3+t_5)$ et $t_2+t_5 = (t_1+t_2)+(t_3+t_5)-(t_1+t_3)$. La somme 62 ne peut être alors qu'en t_2+t_3. Nous en déduisons alors les sommes manquantes et les contenus $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (13, 27, 35, 65, 65)$ et vérifions que tout est compatible avec les contraintes de l'énoncé.

$$\begin{array}{cccc} t_1+t_2=40 & t_1+t_3=48 & t_1+t_4=78 & t_1+t_5=78 \\ & t_2+t_3=62 & t_2+t_4=92 & t_2+t_5=92 \\ & & t_3+t_4=100 & t_3+t_5=100 \\ & & & t_4+t_5=130 \end{array}$$

18 Le jardin de Trinité

Soit ABC un triangle (non aplati) tel que $a = BC, b = CA, c = AB$ entiers, $p = a + b + c$ minimal, $\widehat{C}$ obtus, et $\widehat{B} = 2\widehat{A}$.



Approche géométrique : soit D le point d'intersection entre la bissectrice de $\widehat{B}$ et (AC). Partageant l'angle $\widehat{C}$ et puisque $\widehat{DBC} = \widehat{A}$, les triangles ABC et BCD sont semblables, d'où $d = BD = \frac{ac}{b}$. Puisque $\widehat{ABD} = \widehat{A}$, le triangle ABD est isocèle en D, et donc $DA = d$. En appliquant la loi des sinus au niveau des angles supplémentaires $\widehat{CDB}$ et $\widehat{BDA}$, il vient $\frac{a}{\sin \widehat{CDB}} = \frac{CD}{\sin \widehat{A}}$ et $\frac{c}{\sin \widehat{BDA}} = \frac{d}{\sin \widehat{A}}$, d'où $CD = \frac{ad}{c} = b - d$. En réinjectant l'expression précédente de d, nous obtenons finalement $b^2 = a(a+c)$.

Approche trigonométrique : après simplification par $\sin \widehat{B} = 2 \cos \widehat{A} \sin \widehat{A}$ et $\sin \widehat{C} = \sin 3\widehat{A} = \sin \widehat{A} \left(4 \cos^2 \widehat{A} - 1\right)$, la loi des sinus $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ entraîne $\cos \widehat{A} = \frac{b}{2a}$ et $\frac{c}{a} = 4 \cos^2 \widehat{A} - 1$, d'où $b^2 = a(a+c)$.

Il est clair que $\gcd(a, b, c) = 1$ car sinon p ne serait pas minimal. En particulier cela nécessite $\gcd(a, c) = 1$ compte tenu de la dernière relation. Ainsi il existe deux entiers $q < r$ tels que $\gcd(q, r) = 1$, $a = q^2$ et $a + c = r^2$, d'où $b = qr$ et $p = r(r + q)$. La relation triangulaire $c < a + b$ entraîne $r < 2q$. La loi des cosinus (Al-Kashi) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$ entraîne $c^2 > a^2 + b^2$ ou encore $r > q\sqrt{3}$. Donc $\sqrt{3} < \frac{r}{q} < 2$.

Autre approche directe : la loi des sinus $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}}$ entraîne $\frac{b}{a} = 2\cos\widehat{A}$. Il existe donc deux entiers r et q tels que $\frac{r}{q} = 2\cos\widehat{A} < 2$ et $\gcd(q, r) = 1$. De plus, $\widehat{C} = 180 - 3\widehat{A} > 90$ implique $\widehat{A} < 30$, d'où $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\widehat{A}$. Donc $\sqrt{3} < \frac{r}{q} < 2$. En projetant C sur (AB), nous avons $c = a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A}$; après simplification de $\cos\widehat{B} = 2\cos^2\widehat{A} - 1$, nous en déduisons $c = \frac{ar^2}{q^2} - a$. Il existe donc un entier s tel que $a = sq^2$. Mais $a = sq^2, b = sqr, c = s\left(r^2 - q^2\right)$ et $p = sr(q + r)$, d'où $s = \gcd(a, b, c) = 1$.

Conclusion commune : pour $q = 1, 2$ ou 3, il n'existe pas de r entier. Pour $q = 4$, la seule valeur possible est $r = 7$, fournissant le triangle de côté 16, 28, 33 et de périmètre 77. Pour $q > 4$, il est clair que $r > 7$ et le périmètre sera strictement supérieur.

q	1	2	3	4
$\lceil q\sqrt{3}\rceil$	2	4	6	7
$2q$	2	4	6	8