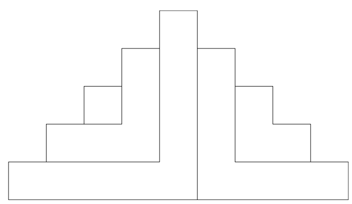
Demi-finales suisses - 26 mars 2011

21 mai 2011

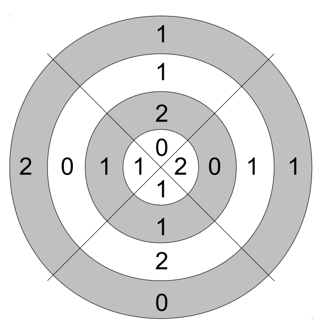
1 Du carré à la pyramide

A symétrie près il y a 1 façon de placer les pièces dans l'ordre décroissant.



2 La cible

Dans la couronne centrale, on peut placer le 2 à droite. Dans la couronne voisine, on peut placer le 2 en haut et le 0 à droite. Nous pouvons alors placer les deux 1 restants dans les quartiers haut et droit. Il reste alors à placer un 2 et un 0 dans le quartier bas. Nous vérifions que la configuration est bien compatible avec les contraintes.



3 Souvenirs, souvenirs

Avec n pièces, il est possible de réaliser au maximum $2^n - 1$ sommes distinctes non nulles. Ainsi pour réaliser 11 sommes distinctes, il est nécessaire que $n \geqslant 4$.

Mais alors il faudrait au moins 3 pièces de 5 puisque $2 \times (2+5) < 15$. Nous vérifions alors qu'avec 4 pièces de 5, ou 3 pièces de 5 et une autre pièce, il est impossible de réaliser par exemple $8 = 1+2+5$.
Les 3 pièces 1, 2 et 2 permettent de réaliser les sommes 1, 2, $3 = 1+2$, $4 = 2+2$ et $5 = 1+2+2$. Avec 2 pièces de 5 supplémentaires, cela permet de réaliser toutes les sommes de 1 à 15.

4 Les rectangles

En exploitant au mieux la symétrie selon la diagonale, nous dénombrons 15 rectangles.

Type	1×1	1×2	1×3	2×2
Nombre	6	2×3	2×1	1

5 Trois pour un

Quitte à considérer $\overline{20ud}$, cherchons les années $\overline{20du}$ avec $u \leqslant d$:
- si $d < 2$, alors $2 = d + u$, d'où 2011.
- sinon $d = 2 + u$, d'où 2020, 2031, 2042, 2053, 2064, 2075, 2086, 2097

Entre 2012 et 2050, il y a donc 7 années « trois pour un » : 2013, 2020, 2024, 2031, 2035, 2042 et 2046.

6 Les trois pions

Théoriquement amener le contenu de la case 1 vers la case a (mouvement noté 1a) nécessite 6 mouvements, 2b, 4, et 3c, 2, soient 12 mouvements théoriques. Mais il faut inverser l'ordre 123 en 321, ce qui ne peut se faire qu'avec au minimum 2 passages par la case x (à l'extrême droite). Remarquant la symétrie du problème, voici 3 séquences en 28 mouvements et entre parenthèse la séquence symétrique :
- 3x-2b-xc-1x-c2-b3-xa-3b-2c (3b-2c-1x-c2-b3-xa-3x-2b-xc)
- 3x-2b-1c-x2-cx-b3-xa-3b-2c (3b-2c-1x-c2-x3-bx-3a-2b-xc)
- 3x-2b-1c-x2-c3-bx-3a-xb-2c (3b-2x-1c-x2-c3-bx-3a-2b-xc)

Idéalement pour être complet, il faudrait montrer que 28 mouvements sont nécessaires.

7 Un jour sans répétition

Cherchons d'abord l'année la plus récente sans répétition : on écarte alors les années (chiffre répété) 2011 (1), 2010 (0), $200x$ (0), $199x$ (9), 1989 (9) et 1988 (8), d'où 1987. Partant du mois 12, le même raisonnement avec les chiffres restants conduit à 06. De même, en remontant du jour 30, nous arrivons finalement à la date du 25.06.1987.

8 Au septième ciel

A l'aide d'une simple division euclidienne, $2011 = 55 \times 36 + 31$, nous en déduisons que $2011 = 24 \times 36 + 31 \times 37$, d'où 31.
Une autre manière d'y arriver : $2011 = 36a + 37b \Rightarrow b \equiv 2011 \pmod{36}$.

9 Le passager

Les trains de voyageurs empruntent les 4 voies A, E, I et O, mais pas U. La dernière lettre utilisée est donc comprise entre O (15ème lettre de l'alphabet) et T (20ème lettre de l'alphabet). Les trains de marchandises ont donc entre $11 = 15 - 4$ et $16 = 20 - 4$ voies (6 solutions).

10 Deux nombres à neuf chiffres

Parmi les nombres à 9 chiffres utilisant une fois les chiffres 1 à 9, le plus petit est 123456789 et le plus grand 987654321. Or, nous vérifions que $123456789 \times 8 = 987654312$. Ce dernier est donc le nombre de Mathias.

11 Produits helvétiques

La propriété des « produits en croix » reste vraie pour 4 disques formant un rectangle (par simplification de l'égalité entre les produits des diagonales parallèles). Cela permet de remplir le diagramme à l'aide de 2 inconnues a et x.

1	x	3
a	ax	3a
20/x	20	60/x

Avec les contraintes $x \mid 20$, $2x \leqslant ax < 20$ et que $\frac{60}{x} < 20$, alors $x = 4$ ou 5. Dans les 2 cas, la relation $a < \frac{20}{x}$ entraîne $a = 2$, d'où les 2 solutions 2-8-6 et 2-10-6.

12 Les amis de Mathilda

Notons les déclarations par le nombre qu'elles contiennent, suivi de V (resp. F) si elle est vraie (resp. fausse).
A l'aide des implications (ou de leurs contrapositions) :
- 24V $\Rightarrow$ 3V, 4V et 6V
- 6V $\Rightarrow$ 3V
- 3V et 4V $\Rightarrow$ 6V

Nous construisons une table de vérité comportant 8 cas contre $C_7^3 = 35$ théoriques :

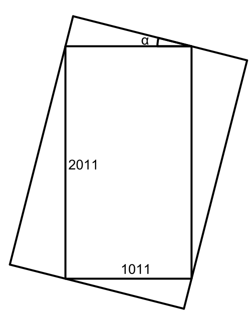
- 24V $\Rightarrow$ 3V, 4V et 6V
- 24F
  - 3F $\Rightarrow$ 6F
  - 3V
    - 4F
      - 6F
      - 6V, puis 5F ou 7F ($ppmc\{5,6,7\} = 210 > 150$, il est impossible d'avoir simultanément 5V, 6V et 7V)
    - 4V, d'où 3V et 4V $\Rightarrow$ 6V, puis 5V ou 7V ou 120V

3	4	5	6	7	24	120	synthèse
V	V	F	V	F	V	F	$144 = 24 \times 6$
F	V	V	F	V	F	V	$4 \times 5 \times 7 > 120$
V	F	V	F	V	F	V	$105 = 3 \times 5 \times 7$
V	F	F	V	V	F	V	$42 = 6 \times 7$
V	F	V	V	F	F	V	$90 = 3 \times 5 \times 6$
V	V	V	V	F	F	F	$60 \times 3 > 150$
V	V	F	V	V	F	F	$84 \times 3 > 150$
V	V	F	V	F	F	V	$108 = 12 \times 9$

Mathilda a donc 42, 90, 105, 108 ou 144 amis.

13 Les deux rectangles

Les deux rectangles partagent le même centre de symétrie. Notons α l'angle formé entre les deux rectangles et exprimons les dimensions du grand rectangle en fonction de α et des dimensions du rectangle gris. L'aire du grand rectangle vaut alors $A = (1011\cos\alpha + 2011\sin\alpha)(2011\cos\alpha + 1011\sin\alpha)$. D'où $A = 1011 \times 2011 + \left(1011^2 + 2011^2\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}$. Donc l'aire maximale est obtenue pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et vaut $A_{max} = \frac{(1011+2011)^2}{2} = 4566242$.



14 Boîte de jazz de l'année

Tout d'abord, $X + E = E$ ou $10 + E$, d'où $X = 0$ ou 10, donc $X = 0$. Puis, $M \times 10^4 < MILLE = DEUX + ONZE < 2 \times 10^4$, d'où $M = 1$.
Ecrivons alors les relations en colonne (r et s désignant une éventuelle retenue 1, sinon 0) : $U + Z = L + 10r$, $r + E + N = L + 10s$ et $s + D + O = I + 10$.
En exprimant L, nous en déduisons $U + Z \equiv E + N + s \pmod{11}$. Or, $ONZE$ est un multiple de 11 s'écrit $O + Z \equiv N + E \pmod{11}$. D'où $U \equiv O + s \pmod{11}$. La seule possibilité est alors $s = 1$, d'où $U = O + 1$ et $D + O = I + 9$.
Exploitons également la somme des 10 lettres et la preuve par neuf :

- $D + E + U + X + O + N + Z + M + I + L = 0 + \cdots + 9 = 45$
- $D + E + U + X + O + N + Z + E \equiv M + I + L + L + E \pmod 9$

D'où $2I + 3L \equiv 7 \pmod 9$ et en particulier $I \equiv 2 \pmod 3$.
Si $I = 8$, alors nous aurions $D + O = 17 = 9 + 8$ (répétition du 8).
Si $I = 5$, alors $D + O = 14 = 8 + 6$ et $L \equiv 2 \pmod 3$, d'où $L = 2$. Ainsi $U = O + 1 > 6 > L$ implique $r = 1$, d'où $U + Z = 12 = 9 + 3$ et la seule possibilité est $U = 9$, $Z = 3$, $O = 8$ et $D = 6$. Alors $E + N = 11 = 7 + 4$. D'où 2 solutions $6790 + 8437 = 15227$ et $6490 + 8734 = 15224$.
Si $I = 2$, alors $L \equiv 1 \pmod 3$, d'où $L = 4$ ou 7. De plus, $D + O = 11$.

- $D + O = 6 + 5$ nécessite que $O = 6$ et $U = 7$, mais nous avons une impossibilité avec $U + Z = L + 10r$.
- $D + O = 8 + 3$
  - $O = 3$ et $U = 4$, mais nous avons une impossibilité avec $U + Z = L + 10r$.
  - $O = 8$ et $U = 9$, d'où $U + Z = L + 10r$ nécessite que $r = 1$, $L = 4$ et donc $Z = 5$. Alors $E + N = 13 = 7 + 6$. D'où 2 solutions $3790 + 8657 = 12447$ et $3690 + 8756 = 12446$.

En conclusion $MILLE = 12446, 12447, 15224$ ou 15227.

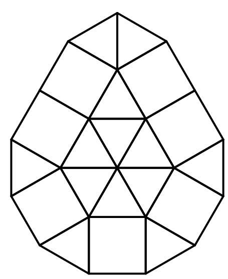
15 Pliage

Les relations $EA = EC$ et $FA = FC$ impliquent que (EF) est la médiatrice de $[AC]$. Par définition de O le centre de symétrie du rectangle, $OA = OC$, d'où O appartient à (EF) et est donc le milieu de $[EF]$. Ses diagonales ayant le même milieu et étant perpendiculaires, le quadrilatère AECF est un losange.
Nous cherchons la valeur de $AB = AH + HE + EB = 2(EB + 10) = 2x$. Alors $AE = AB - EB = 2x - (x - 10) = x + 10$. Dans le triangle EBC rectangle en B, le théorème de Pythagore fournit la relation $(x - 10)^2 + 48^2 = (x + 10)^2$ ou encore $40x = 48^2$ et donc $2x = 115,2$.

16 Un hendécagone

A l'aide de la triangulation obtenue en joignant les $n - 3$ diagonales partant d'un même sommet fixé, nous montrons que la somme des angles intérieurs d'un polygone à n côtés vaut $180(n - 2)$.

Par construction, les angles intérieurs ne peuvent valoir que 60° (1 triangle), 90° (1 carré), 120° (2 triangles) ou 150° (1 triangle et 1 carré). La note en fin d'énoncé élimine clairement un sommet d'angle 180° (2 carrés ou 3 triangles).
Ainsi avec a, b et c angles intérieurs de respectivement 60°, 90° et 120°, et $n - a - b - c$ angles intérieurs de 150°, nous avons la relation $60a + 90b + 120c + 150\,(n - a - b - c) = 180\,(n - 2)$. Après simplification il vient $3a + 2b + c + n = 12$, ce qui prouve au passage que $n \leqslant 12$. Avec $n = 11$, la seule possibilité est $a = b = 0$ et $c = 1$. D'où 1 angle intérieur de 120° et 10 angles intérieurs de 150°.
En essayant de construire une succession alternée de 5 carrés et 6 triangles, nous n'y arrivons pas, car alors nous aurions intérieurement un pentagone régulier ayant 4 angles intérieurs de 120° et l'autre de 60°. Il faut donc introduire un ou plusieurs angles de 180° (au sens extension de côté), sachant qu'extérieurement 2 carrés sont moins coûteux que 3 triangles (mais il faudrait analyser l'impact intérieur). Quelques essais en s'inspirant des solutions optimales pour d'autres valeurs de n (en particulier 12) nous amènent à cette figure ne nécessitant que 20 pièces, 7 carrés et 13 triangles.



17 Le jeu du onze

Notons t_n^p le nombre de distributions de deux jeux de n cartes entre p amis selon les règles de l'énoncé. De manière évidente, nous avons $t_n^p = 0$ si $2n < p$, $t_n^1 = 1$ et $t_n^0 = 0$. Pour $2n = p$, nous avons $t_n^{2n} = \frac{(2n)!}{2^n}$.
Pour déterminer t_n^p par récurrence, considérons une distribution quelconque des $2n$ cartes aux p joueurs, et ôtons les deux cartes portant le numéro n tel que $2n \geqslant p + 1$. Comptons alors le nombre de distributions possibles en fonction du nombre d'amis sans carte.

- tous les amis ont une carte, les 2 cartes n étaient détenues par :
  - un même ami : pt_{n-1}^p
  - deux amis : $C_p^2 t_{n-1}^p$
- 1 ami n'a plus de carte, les 2 cartes n étaient détenues par :
  - cet ami uniquement : pt_{n-1}^{p-1}
  - lui et un autre ami : $p\,(p-1)\,t_{n-1}^{p-1}$
- les 2 cartes n étaient détenues par 2 amis n'ayant plus de carte : $C_p^2 t_{n-1}^{p-2}$

Ainsi nous établissons la relation $t_n^p = \frac{p(p+1)}{2} t_{n-1}^p + p^2 t_{n-1}^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} t_{n-1}^{p-2}$.
Pour $p = 2$, elle s'écrit $t_n^2 = 3t_{n-1}^2 + 4$ pour $n \geqslant 2$ et $t_1^2 = 1$.

D'où $t_n^2 + 2 = 3\left(t_{n-1}^2 + 2\right)$, $t_n^2 + 2 = 3^{n-1}\left(t_1^2 + 2\right)$ et donc $t_n^2 = 3^n - 2$.
Pour $p = 3$, elle s'écrit $t_n^3 = 6t_{n-1}^3 + 9t_{n-1}^2 + 3$ pour $n \geqslant 2$ et $t_1^3 = 0$.
Montrons que $t_n^3 = 6^n - 3^{n+1} + 3$ à l'aide de la fonction génératrice $T(x) = \sum_{n\geqslant 0} t_n^3 x^n$ (il est possible de le montrer par récurrence, mais il faut au préalable « deviner » la forme close).

$$T(x) = \sum_{n\geqslant 2}\left(6t_{n-1}^3 + 3^{n+1} - 15\right)x^n = 6xT(x) + \sum_{n\geqslant 2}\left(3^{n+1} - 15\right)x^n$$

$$T(x) = \sum_{m\geqslant 0}(6x)^m \sum_{n\geqslant 2}\left(3^{n+1} - 15\right)x^n = \sum_{n\geqslant 2}\sum_{m=0}^{n-2} 6^m\left(3^{n-m+1} - 15\right)x^n$$

D'où $t_n^3 = \sum_{m=0}^{n-2} 6^m\left(3^{n-m+1} - 15\right)$

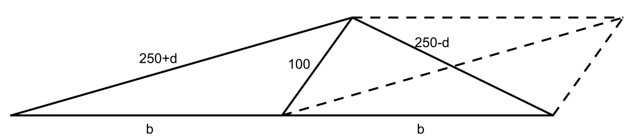
$$t_n^3 = 3^{n+1}\sum_{m=0}^{n-2} 2^m - 15\sum_{m=0}^{n-2} 6^m = 3^{n+1}\left(2^{n-1} - 1\right) - 3\left(6^{n-1} - 1\right)$$

Finalement $t_n^3 = 6^n - 3^{n+1} + 3$ et $t_{11}^3 = 362\,265\,618$.

18 Le parallélogramme

Le triangle de côté $250 - d, 250 + d$ et $2b$ a la même aire a que le parallélogramme. Le théorème de la médiane et la formule de Héron nous donnent les relations :

- $(250 + d)^2 + (250 - d)^2 = 2b^2 + 100^2$, d'où $b^2 = 250^2 + d^2 - 100^2$
- $a^2 = (250 + b)(250 - b)(b + d)(b - d)$, d'où $a^2 = \left(250^2 - b^2\right)\left(b^2 - d^2\right)$



En substituant b^2, il vient $a^2 = 50^2\left(5^2 - 2^2\right)\left(100^2 - d^2\right)$. Il existe donc un entier k tel que $21k^2 + d^2 = 100^2$ et alors $a = 1050k$.
A ce stade, plusieurs pistes :

- tester les 21 valeurs de $1 \leqslant k \leqslant 21$.
- travailler modulo 10 : k^2 se termine par 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, alors d^2 se termine par 0, 9, 6, 5, 4 ou 1.
  - $k = 10l$ et $d = 10e$ entraîne $21l^2 + e^2 = 100$ et il reste à vérifier $l = 1$ ou 2.
  - $k = 10l \pm 1$ et $d = 10e \pm 3$ entraîne $2\left(105l^2 \pm 21l + 5e^2 \pm 3e\right) = 997$ sans solution.
  - $k = 10l \pm 2$ et $d = 10e \pm 4$ entraîne $105l^2 \pm 42l + 5e^2 \pm 4e = 445$ et l est impair donc il reste à vérifier $l = 1$.
  - $k = 10l \pm 5$ et $d = 10e \pm 5$ entraîne $2\left(105l^2 \pm 105l + 5e^2 \pm 5e\right) = 945$ sans solution.

- $k = 10l \pm 4$ et $d = 10e \pm 2$ entraîne $105l^2 \pm 84l + 5e^2 \pm 2e = 483$, pas de simplification donc il faut considérer les cas $k = 4, 6, 14$ et 16
  - $k = 10l \pm 3$ et $d = 10e \pm 1$ entraîne $2\left(105l^2 \pm 63l + 5e^2 \pm e\right) = 981$ sans solution.
- travailler modulo 21 en examinant les valeurs de d telles que $d^2 \equiv 100^2 \pmod{21}$, d'où $d \equiv \pm 2$ ou $\pm 5 \pmod{21}$ et 19 cas à vérifier.
- travailler modulo 16 en remarquant qu'un carré est congru à 0, 1, 4 ou 9 (mod 16) et donc que $k \equiv d \equiv 0 \pmod 4$; il ne reste alors plus qu'à vérifier les 5 cas $k = 4, 8, 12, 16$ ou 20.
- une variante en travaillant 2 fois modulo 4...
- utiliser les techniques de paramétrisation comme pour l'équation de Pythagore :
  - $d = \frac{e}{f}\left(p^2 - 21q^2\right)$, $k = \frac{e}{f}2pq$ et $100 = \frac{e}{f}\left(p^2 + 21q^2\right)$ où $f = \gcd(p, q)$.
- utiliser l'identité généralisant celle de Brahmagupta-Fibonacci :
  - $\left(p^2 + 21q^2\right)\left(r^2 + 21s^2\right) = (pr \mp 21qs)^2 + 21\,(qr \pm ps)^2$
  - en remarquant que $2^2 + 21 \times 1^2 = 5^2$, cela donne $17^2 + 21 \times 4^2 = 25^2$.
  - en multipliant par 20^2, la première et par 4^2 la seconde, il vient $40^2 + 21 \times 20^2 = 100^2$ et $68^2 + 21 \times 16^2 = 100^2$, conduisant aux 2 solutions $a = 16800$ ou 21000.
  - mais comment être sûr de ne pas oublier de solution ?