Finales régionales

21 mai 2011

1 Le jeu de cartes

Notations : n (resp. r) désigne la couleur noire (resp. rouge) ; x_1 (resp. x_2) désigne le nombre de cartes de couleur x du paquet du dessus (resp. dessous).
Il y a 26 cartes noires dans le jeu se traduit par $n_1 + n_2 = 26$, tandis que la relation $r_2 + n_2 = 26$ exprime le fait que le paquet du dessous compte 26 cartes. Nous en déduisons alors $r_2 = n_1 = 18$.

2 Les quatre reines

En éliminant toutes les cases d'où une reine pourrait atteindre la case X (ce qui est équivalent à éliminer toutes les cases atteintes par une reine virtuellement placée en X), il reste 4 emplacements, comme la première figure de l'énoncé l'indique à une symétrie près.

			R
	X		
			R
R		R	

3 Les huit jetons

Il y a 7 chiffres, l'addition comporte donc un nombre à 4 chiffres (qui ne peut commencer que par 1 car à l'aide des jetons, le plus petit nombre commençant par un 2 réalisable serait 2011) et un nombre à 3 chiffres. De la preuve par neuf nous déduisons qu'il y a trois 6 ou bien trois 9. Pour réaliser le 1 des unités, il y a 2 possibilités :

- $0 + 1$: pas d'autre choix que $2 + 9$ pour la dizaine, mais impossible de réaliser 9 pour les centaines.
- $2 + 9$: pas d'autre choix que $1 + 9$ pour la dizaine, et le reste s'impose (le nombre à 3 chiffres ne pouvant commencer par un 0).

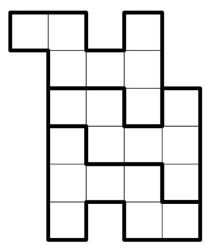
En intégrant les transpositions possibles entre les chiffres des unités ou ceux des dizaines, il y a 4 solutions : $1012 + 999$, $1019 + 992$, $1092 + 919$ ou $1099 + 912$.

4 La pyramide de Théops

Rappelons que $s_p = \sum_{n=1}^{p} n^2 = \frac{1}{6} p (p+1)(2p+1)$. Partant du sommet de la pyramide (1er niveau), se convaincre que le $n$ième niveau est formé d'un carré de $n \times n$ cubes. Comme $s_6 = 91 < 111 < 140 = s_7$, nous en déduisons que Théops a réalisé 6 étages et il lui restera alors $111 - 91 = 20$ cubes inutilisés.

5 Découpage

Nous cherchons trois parties, chacune formée de 7 petits carrés a priori entiers (rien ne l'indique mais c'est plus facile ainsi), et ayant la même forme à un retournement près ; nous nous aidons du creux présent en haut et en bas, en mobilisant les 6 carrés autour. Assez rapidement nous parvenons à ce découpage (qui finalement ne nécessite pas de retournement).



6 La calculatrice de Mathias

Il est aisé de montrer que si l'entier initial n est tel que $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$, alors il faut appuyer $p+1$ fois sur la touche pour parvenir à 0.
Puisque $2^{10} = 1024 \leqslant 2011 < 2048 = 2^{11}$, il faut appuyer 11 fois sur la touche pour parvenir à 0. Voici la séquence d'entiers obtenus : 1005, 502, 251, 125, 62, 31, 15, 7, 3, 1, 0.

7 Le taquin

Deux cases séparent les chiffres 1, 2 ou 3 entre leur position dans la situation de gauche et celle de droite, tandis qu'une case sépare les chiffres 4 ou 5, d'où 8 mouvements nécessaires. Par ailleurs, en remontant de la situation de droite, soit on déplace le chiffre :

- 5, augmentant alors la distance du chiffre 5 d'une case
- 3, puis nécessairement le chiffre 2 (revenir en arrière ne minimiserait pas le nombre de mouvements), augmentant alors la distance du chiffre 2 d'une case

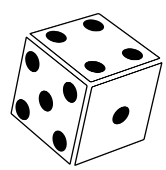
Dans les 2 cas, cela ajoute 2 mouvements supplémentaires. Les 10 mouvements 3, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1, 2, 5 prouvent que le minimum est bien atteint.

8 Les deux nombres

Parmi les $C_5^2 = 10$ sommes possibles, éliminons les résultats uniques pour lesquels Mathilde aurait pu déterminer les deux nombres. La somme connue de Mathilde est donc $13 = 2 + 11 = 5 + 8$. La différence $9 = 11 - 2$ est unique (différence entre les deux termes extrêmes), alors que la différence 3 apparaît plusieurs fois, les entiers 2, 5, 8 et 11 étant en progression arithmétique.
Les deux nombres choisis par l'oncle sont donc 5 et 8.

9 Les dés de Didier

Chacune des faces 1, 4 et 5 est invariante par toute symétrie du cube, tandis que les trois faces associées (complémentaire à 7) 6, 3 et 2 ont deux orientations possibles. Considérons un dé où la face 4 est fixée sur le dessus et, modulo un ou plusieurs quarts de tour autour de l'axe vertical, la face 5 devant. Quitte à retenir le dé symétrique dans un miroir, la face 1 est à droite de la face 5.
Il y aura ansi $2^4 = 16$ dés différents.



10 De 1 à combien ?

Nous cherchons n tel que $1 + \cdots + n = \overline{aaa}$ ou encore $\frac{n(n+1)}{2} = 111a = 3 \times 37a$. Ainsi $n\,(n+1) = 6 \times 37a$ et 37 divise n ou $n+1$. Etant donné que $\frac{n(n+1)}{2} < 10^3$, ou encore $n \leqslant 44$, il reste 2 cas :

- $n = 37 :\ 19 = 3a$ impossible
- $n + 1 = 37 :\ 6 = a$

Ainsi $n = 36$.

11 La route de l'année

Ayant 2 arcs de cercle de longueur $CD = 11$ et $DC = CD + 1 = 12$, la route circulaire mesure 23. Une paire parmi les 11 paires de distances $\{x, 23 - x\}$ avec $1 \leqslant x \leqslant 11$ sera absente.
A et B sont situés sur le même arc de cercle, CD ou DC, car sinon nous aurions une répétition $12 = 11 + 1$ ou $11 + 2 = 12 + 1$.
Un tronçon élémentaire désigne un arc de cercle ne passant que par les 2 villes qui le bordent. Raisonnons sur des configurations de 5 tronçons élémentaires.
Remarque : si la configuration $a - b - c - d - e$ est solution, alors $a - e - d - c - b$ l'est aussi, les deux ensembles de 20 distances étant identiques.

- $11 - a - 3 - b - c$ avec $a + b + c = 9 = 1 + 2 + 6$: $b = 1$ pour éviter la répétition $12 = 11 + 1$, et $a = 2$ pour éviter $3 = 1 + 2$, mais alors $c = 6 = a + 3 + b$: pas de solution.
- $11 - a - 1 - 2 - b$ avec $a + b = 9 = 4 + 5$: dans les 2 sous-cas nous avons une répétition avec $5 = 1 + 4$ ou $5 + 1 = 2 + 4$: pas de solution.
- $a - b - 3 - c - 12$ avec $a + b + c = 8 = 1 + 2 + 5$: $a = 2$ pour éviter la répétition $5 = 3 + 2$, et $c = 1$ pour éviter $3 = 1 + 2$, d'où $b = 5$: solution.
- $a - 1 - 2 - b - 12$ avec $a + b = 8$: $\min(a, b)$ ne peut valoir, ni 1, ni 2, ni $3 = 1 + 2$, ni $4 = a = b$: pas de solution.
- $a - b - c - 3 - d$ avec $a + b = 11$ et $c + d = 9$: d'après la remarque, quitte à permuter a avec b, et c avec d, nous pouvons supposer $c < \frac{9}{2} < d$, d'où :
  - $c = 1$: $3 + d = 11 = a + b$: pas de solution.
  - $c = 2$: $\min(a, b)$ ne peut valoir $2, 3, 5 = c + 3, 7 = d$ ou $10 = 3 + d$, ainsi que1, 4, 6, 8 ou 9 par complémentaire à 11 : pas de solution.
  - $c = 4$: $\min(a, b)$ ne peut valoir $3, 4, 5 = d, 7 = c + 3$ ou $8 = 3 + d$, ainsi que 6 par complémentaire à 11 :
    - $a = 1$: $b = 10$: solution.
    - $a = 2$: $a + d = 7 = c + 3$: pas de solution.
    - $a = 9 = b + c + 3$: pas de solution.
    - $a = 10$: $b + c = 5 = d$: pas de solution.
- $a - 3 - b - c - d$ avec $a + b = 8$ et $c + d = 12$: d'après la remarque, quitte à permuter a avec b, et c avec d, nous pouvons supposer $a < 4 < b$, d'où :
  - $a = 1$: $\min(c, d)$ ne peut valoir $1, 3, 4 = a + 3, 7 = b, 10 = 3 + b$ ou $11 = a + 3 + b$, ainsi que 2,5,8 ou 9 par complémentaire à 12, ni $6 = c = d$: pas de solution.
  - $a = 2$: $\min(c, d)$ ne peut valoir $2, 3, 5 = a + 3, 6 = b, 9 = 3 + b$ ou $11 = a + 3 + b$, ainsi que 1,7 ou 10 par complémentaire à 12 :

* $c = 4$: $b + c = 10 = d + a$: pas de solution.
* $c = 8$: $d + a = 6 = b$: pas de solution.

En n'oubliant pas la remarque, nous obtenons donc 4 solutions :

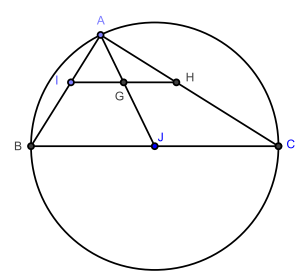
- $2 - 5 - 3 - 1 - 12$, d'où $EA = 5 + 3 = 8$
- $2 - 12 - 1 - 3 - 5$, d'où $EA = 2 + 12 + 1 + 3 = 18$
- $1 - 10 - 4 - 3 - 5$, d'où $EA = 10 + 4 + 3 = 17$
- $1 - 5 - 3 - 4 - 10$, d'où $EA = 1 + 5 + 3 = 9$

12 AAAA

Nous cherchons $i - 2$ impair tel que $(i-2)^2 + i^2 + (i+2)^2 = \overline{AAAA}$ ou encore $3i^2 + 8 = 1111A = 11 \times 101A$. Posons $i = 2j + 1$, de sorte que $12j\,(j+1) = 11\,(101A - 1)$, d'où $101A \equiv 1$ ou encore $A \equiv 5 \pmod{12}$. Donc $A = 5$ et $j\,(j+1) = 11 \times 42 = 21 \times 22$. D'où $j = 21$ et $i = 43$.
Le nombre cherché est donc 41.

13 Le trapèze

Considérons un trapèze $IHCB$ tel que $IH = 1515$, $BC = 2011$ et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires. Les droites supportant les côtés non parallèles (BI) et (CH) se coupent en A. Notons G le milieu de IH et J celui de BC. J est alors le centre du cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en A, et donc $AJ = \frac{BC}{2}$. D'après le théorème de Thalès, $\frac{AG}{AJ} = \frac{IH}{BC}$. Nous en déduisons que $AG = \frac{IH}{2}$.
Finalement $GJ = AJ - AG = \frac{BC-IH}{2} = \frac{2011-1515}{2} = 248$ cm.



14 Que de 2 !

Nous cherchons $222222 = 2 \times 111 \times 1001 = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ comme produit de 2 nombres à 3 chiffres. Un des deux nombres est $37r \leqslant 999$ et l'autre vaut $\frac{222222}{37r} < 1001$, d'où $7 \leqslant r \leqslant 27$. Le tableau suivant résume les 7 solutions à réordonner.

$37 \times 7 = 259$	$2 \times 3 \times 11 \times 13 = 858$
$37 \times 11 = 407$	$2 \times 3 \times 7 \times 13 = 546$
$37 \times 13 = 481$	$2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$
$37 \times 2 \times 7 = 518$	$3 \times 11 \times 13 = 429$
$37 \times 3 \times 7 = 777$	$2 \times 11 \times 13 = 286$
$37 \times 2 \times 11 = 814$	$3 \times 7 \times 13 = 273$
$37 \times 2 \times 13 = 962$	$3 \times 7 \times 11 = 231$

15 Années compatibles

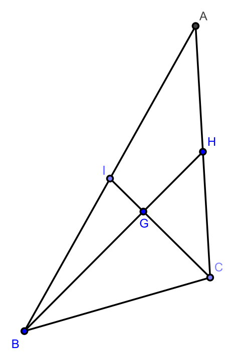
Considérons d'abord le cas de deux années compatibles $\overline{20du}$ et $\overline{20d\,(u+1)}$ où $0 \leqslant u \leqslant 8$. Ainsi nous avons $2001 + 10d + u \equiv 0$ ou encore $1999 + 9d \equiv 0 \pmod{2+d+u}$. Nous vérifions alors si l'un des entiers de $2+d$ à $10+d$ divise $1999+9d$. Pour limiter les calculs, nous utilisons les critères de divisibilité classiques et finalement seule une division par 7, voire 13 doit être effectuée. Examinons ce que donnent les premières valeurs de d.

- $d = 1$: $2008 \equiv 0 \pmod{3+u}$ et nous vérifions que 2008 est divisible par 4 ($u = 1$) ou 8 ($u = 5$), retrouvant ainsi les exemples de l'énoncé
- $d = 2$: $2017 \equiv 0 \pmod{4+u}$, pas de solution.
- $d = 3$: $2026 \equiv 0 \pmod{5+u}$, pas de solution.
- $d = 4$: $2035 \equiv 0 \pmod{6+u}$ et nous vérifions que 2035 est divisible par 11 ($u = 5$).

N'oublions pas d'examiner le cas de deux années compatibles $\overline{20d9}$ et $\overline{20\,(d+1)\,0}$ où $0 \leqslant d \leqslant 8$. Ainsi nous avons $2010+10d \equiv 0$ ou encore $1900 \equiv 0 \pmod{11+d}$. La seule possibilité est $d = 8 > 4$.
Finalement les deux années compatibles suivantes seront 2045 et 2046.

16 Ortho-grave

Notons H le milieu de AC, I le milieu de AB, et G l'intersection des 2 médianes (AH) et (CI). Par définition, G est le centre de gravité du triangle ABC, d'où $BG = \frac{2}{3}BH$ et $CI = \frac{2}{3}CG$.
Le théorème de la médiane fournit les relations $AB^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AC^2 + 2BH^2$ et $AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2CI^2$. En les additionnant et après simplification et substitution, il vient $2BC^2 + \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right) = \frac{9}{2}\left(BG^2 + CG^2\right)$. La relation $BG^2 + CG^2 = BC^2$ découle du théorème de Pythagore dans le triangle BCG rectangle en G.
Il vient alors $BC^2 = \frac{1}{5}\left(AB^2 + AC^2\right) = 100$ et donc $BC = 10$ cm.



17 L'âge du professeur

En l'absence de précision sur un âge minimal de fécondité, nous cherchons le ou les entiers inférieurs à 100 ne pouvant s'écrire comme la somme d'au plus 4 termes distincts de la suite de Fibonacci que nous définissons ici par $f_2 = 1$, $f_3 = 2$ et la relation de récurrence $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

Résultat préliminaire : $s_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{2n-1} f_i = f_{2n+1} - 2$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

Par récurrence, c'est vrai pour $n = 2$, puisque $s_2 = 3 = f_5 - 2$.

Pour $n \geqslant 2$, $s_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=2}^{2n-1} f_i + f_{2n} + f_{2n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $s_{n+1} = f_{2n+1} - 2 + f_{2n+2} = f_{2n+3} - 2$.

Revenons à notre problème et pour tout entier $n \geqslant 1$, montrons que $f_{2n+1} - 1$ est le plus petit entier s'écrivant comme la somme de n termes distincts (sous-entendu ne pouvant s'écrire comme la somme d'au plus $n-1$ termes distincts).

Par récurrence, c'est vrai pour $n = 1$ car $f_3 - 1 = 1 = f_2$.

Supposons le résultat acquis pour $n \geqslant 1$.

Par hypothèse de récurrence, les entiers strictement inférieurs à $f_{2n+1} - 1$ s'écrivent comme la somme d'au plus $n-1$ termes distincts. Ainsi les entiers de $f_{2n+1} + 1$ à $f_{2n+1} + f_{2n} - 1 = f_{2n+2} - 1$, et de $f_{2n+2} + 1$ à $f_{2n+2} + f_{2n+1} - 2 = f_{2n+3} - 2$ s'écrivent comme la somme d'au plus n termes distincts, tout comme trivialement f_{2n+1} et f_{2n+2}.

Comme $\displaystyle\sum_{i=2}^{2n+1} f_i < f_{2n+3} - 1$ d'après le résultat préliminaire, f_{2n+2} est nécessairement présent dans toute somme exprimant $f_{2n+3} - 1$. Par hypothèse de récurrence, $f_{2n+3} - 1 = f_{2n+2} + f_{2n+1} - 1$ ne saurait s'écrire comme la somme d'au plus n termes distincts et est bien le plus petit entier s'écrivant comme la somme de $n+1$ termes distincts.

Remarque : nous en déduisons que $f_{2n+1} - 1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_{2i}$.

Ainsi $f_{11} - 1 = 88 = 55 + 21 + 8 + 3 + 1$ est le plus petit entier ne pouvant s'écrire comme la somme d'au plus 4 termes distincts.
Les entiers de $1 \leqslant i \leqslant 10 < 12 = f_7 - 1$ s'écrivant comme la somme d'au plus 3 termes distincts, nous en déduisons que $f_{11} = 89$ et $90 \leqslant f_{11} + i \leqslant 99$ s'écrivent comme la somme d'au plus 4 termes distincts.
Le professeur est donc âgé de 88 ans.

18 L'île parfaite

Le quadrilatère $ABCD$ est circonscriptible, d'où $AB{+}DC = BC{+}AD$ (théorème de Pitot : ces quatre longueurs se décomposent selon les points de tangence en huit longueurs égales deux à deux, le centre de l'étang étant l'intersection des 4 bissectrices) d'où $BC = AB + 44$.
Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible, d'où $\hat{B} + \hat{D} = 180°$ et donc $\hat{B} = 45°$.
Dans les triangles ABC et ACD le théorème d'Al-Kashi fournit les relations $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \hat{B}$ et $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \hat{D}$.
D'où $(BC - AB)^2 + AB \cdot BC \left(2 - \sqrt{2}\right) = (77 - 33)^2 + 33 \cdot 77 \left(2 + \sqrt{2}\right)$, qui se simplifie en $2AB\,(AB + 44) = 33 \cdot 77 \left(2 + \sqrt{2}\right)^2$.
Posons $x = \frac{AB}{11}{+}2$. La dernière relation se réécrit en $(x - 2)\,(x + 2) = 21 \left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.
D'où $x^2 = 67 + 42\sqrt{2} = \left(7 + 3\sqrt{2}\right)^2$ et donc $x = 7 + 3\sqrt{2}$.
Finalement $AB = 11x - 22 = 55 + 33\sqrt{2} \approx 102$ m.