Finale suisse

Daniel Collignon

12 mai 2012

1 Les pas de Mathilde

A mi-chemin, Mathilde a parcouru $\frac{600}{2} = 300$ mètres. La distance entre sa maison et l'école est donc de 600 mètres.

2 Le sens du temps

15:51 est le prochain palindrome : il aura lieu dans 70 minutes.

3 Jour de chance

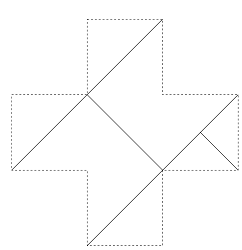
La somme maximale survient :

- un 29 pour les jours, soit $2 + 9 = 11$.
- en septembre pour les mois, soit 9.

La somme pour l'année en 2012 vaut $2+0+1+2 = 5$: on ne peut donc espérer faire mieux que $11 + 9 + 5 = 25$.
En revanche, le 29 septembre 2013 permet bien d'obtenir 26.

4 Faire plus avec moins

Une fois compris comment placer les gros morceaux, il vient par exemple :



5 Le calcul de l'année

Si s désigne la somme des chiffres comptés avec le signe "-", alors la "preuve par neuf" indique que $1 + \cdots + 9 - 2s \equiv 2012$ ou encore $s \equiv 2 \pmod 9$. Puisque $123+456+789 < 2012$, il y aura un nombre à 4 chiffres. Le choix de 1234 semble raisonnable et le calcul $1234 - 5 - 6 + 789 = 2012$ vient assez rapidement.

6 Les aniversaires

Aucun membre de ce groupe n'est né avant mai car au mieux le 30 avril permet d'arriver à $30 + 4 = 34$.
Il reste donc 8 mois pour construire un groupe de personnes nées un $35 - m$ (ou $36 - m$) du mois m pour $5 \leqslant m \leqslant 12$.

7 Père et fils

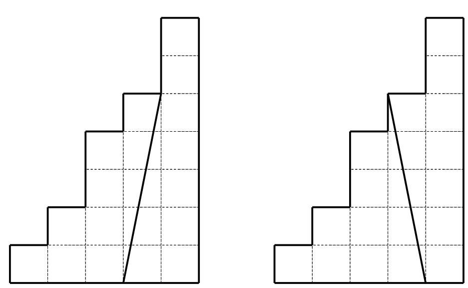
Si p et f désignent les âges du père et du fils, alors nous avons les relations $p + 4 = 5\,(f + 4)$ et $p + 22 = 2\,(f + 22)$. D'où par différence, $18 = 24 - 3f$. Donc $f = 2$ et $p = 26$.

8 Multiplication

La multiplication s'écrit $\overline{abca} \times 7 = \overline{adba7}$. Nous allons travailler par colonne modulo 10 de droite à gauche : $7a \equiv 7$, d'où $a = 1$; $7c \equiv 1$, d'où $c = 3$; $7b + 2 \equiv b$, d'où $b = 8$ (3 étant déjà pris). Finalement la multiplication est $1831 \times 7 = 12817$.

9 Le partage de Mathilda

Nous comptons 19 petits carrés, donc chaque partie aura une aire de $\frac{19}{2} = 9,5$. La vérification exhaustive se fait assez rapidement car il existe une seule position séparante s'appuyant sur un point ; de plus, l'aire d'un morceau se décompose en un nombre entier de petits carrés plus un demi-rectangle (qui doit donc avoir deux côtés impairs).



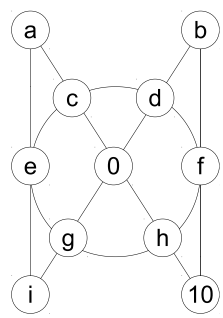
10 Une moyenne étonnante

La relation $\overline{abc} = \frac{\overline{bca}+\overline{cab}}{2}$ s'écrit $189a = 81b + 108c$ ou encore $7a = 3b + 4c$ après division par 27. D'où $b \equiv c \pmod 7$.

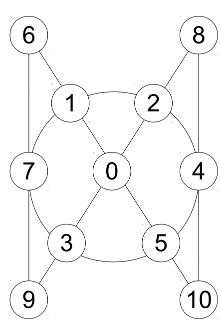
b	1	2	8	9
c	8	9	1	2
a	5	6	4	5

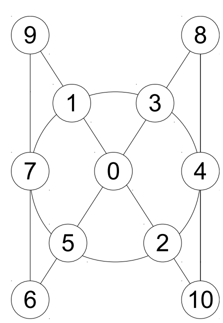
Ainsi il y a 4 solutions : 481, 518, 592 ou 629.

11 De 0 à 10



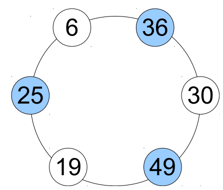
En permutant c avec h, et/ou d avec g, on obtient 3 autres solutions : nous supposerons désormais $c < h$ et $d < g$.
Chaque case est comptée dans 2 sommes, d'où $5S = 2\,(0 + \cdots + 10) = 10 \times 11$, soit $S = 22$. Les 6 cases du cercle sont alors $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22$. Ainsi $a + b + i = 6 + 8 + 9 = 23$. Mais $a + e + i = 22$, d'où $b = e + 1$. Le chiffre 6 ne saurait être dans la colonne de droite (sinon $22 = 10 + 6 + 6$ engendrerait une répétition). La seule possibilité est $b = 8$ et $e = 7$. D'où $f = 4$. Selon que $6 = a$ ou i, nous obtenons les 2 configurations suivantes, soit 8 solutions en tout.



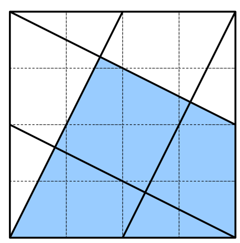


12 Quadrature du cercle

Nous cherchons $0 < a < b < c$ tels que $a + b + c$ soit minimal avec $a + b = x^2$, $a + c = y^2$ et $b + c = z^2$. Alors $x < y < z$ et $2a = x^2 + y^2 - z^2$.
Parmi x, y et z, il y a soit 3 nombres pairs, soit 1 pair et 2 impairs.
Par ailleurs, $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,(a + b + c)$ doit être minimal.
$2a > 0$ entraîne $z^2 < x^2 + y^2 \leqslant (z-2)^2 + (z-1)^2$, d'où $z > 5$.
Si $z = 6$, alors comme $3^2 + 4^2 < 6^2$, $y = 5$ et comme $3^2 + 5^2 < 6^2$, $x = 4$ mais $2a$ serait impair.
Si $z = 7$, alors comme $4^2 + 5^2 < 7^2$, $y = 6$ et comme $3^2 + 6^2 < 7^2$, $x = 5$, d'où $a = 6$, $b = 19$ et $c = 30$.
Si $z \geqslant 8$, alors comme $5^2 + 6^2 < 8^2$, $y \geqslant 7$, mais alors $x^2 + y^2 + z^2 > 7^2 + 8^2 > 5^2 + 6^2 + 7^2$.



13 Un morceau de carré



Gardons une certaine symétrie en traçant 2 autres segments : le carré initial d'aire 1 est partitionné en 4 triangles, 4 trapèzes et 1 carré. Notons x, y et z les aires d'un triangle, d'un trapèze et du carré. Alors à l'aide des "droites des milieux", nous montrons que $3x = y$ et $z = x + y = 4x$.
Puisque $4x + 4y + z = 1$, ainsi $x = \frac{1}{20}$, $y = \frac{3}{20}$ et $z = \frac{1}{5}$.
L'aire de la partie colorée vaut alors $x + 2y + z = 11x = \frac{11}{20}$.

14 Le plan routier

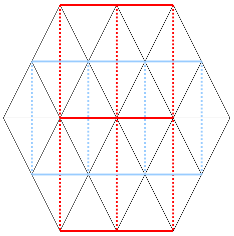
Notons $0 < a < 60$ la distance Arithméville-Geomcity et b Geomcity-Algèbris.
Posons $s = a - b$ et $p = -ab$.
Les théorèmes de Pythagore et de Thalès fournissent les relations $a^2 + b^2 = 91^2$ et $\frac{a}{b} = \frac{60-a}{60} < 1$. D'où $s^2 - 2p = 91^2$, $60s = p$ et $s < 0$.
Alors $s^2 - 120s - 91^2 = 0$, d'où $s = -49$ (169 étant écartée).
a et $-b$ sont donc racines de $x^2 - sx + p = 0$, d'où $a = 35$ et $b = 84$.

15 Sans rectangle

Dénombrons les 45 rectangles :

- 9 rectangles (traits rouges) : 4 petits, 2 moyens horizontaux, 2 moyens verticaux et 1 grand
- 6 rectangles (traits bleus) : 3 petits, 2 moyens et 1 grand

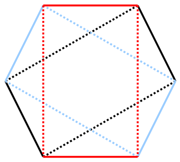
Les autres s'obtiennent par symétrie ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de tour).



Considérons les 3 ensembles :

- C le point central
- E les sommets extérieurs formant un grand hexagone
- M les milieux des côtés du grand hexagone formant un hexagramme
- I les sommets intérieurs (hors C) formant un petit hexagone

Considérons 6 pions disposés selon un hexagone (ou un hexagramme si on inverse les traits pleins et les traits en pointillés). Il existe alors 3 rectangles (noir, bleu et rouge) dont deux côtés opposés sont tracés en traits pleins. Ôter 1 pion permet d'éliminer 2 rectangles. Pour éliminer l'autre rectangle, il faut ôter un deuxième pion non diamètralement opposé au premier.



Ce raisonnement appliqué à E, M puis I montre qu'il faut au moins $2 \times 3 = 6$ pions.
Montrons que 7 pions ne suffisent pas en distinguant 4 cas selon les nombres de pions des 4 ensembles :

Cas	1	2	3	4
E	3	2	2	2
M	2	3	2	2
I	2	2	3	2
C	0	0	0	1

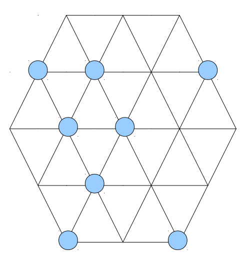
- Cas 1 et 4 : sur les 3 directions formées de 2 sommets ni voisins, ni diamétralement opposés de I, il en reste au moins $6 - 2 \times 2 = 2$ parmi M et autant parmi I : au moins 1 sera commune, nécessitant un pion supplémentaire.

- Cas 3 : sur les 6 orientations allant de C vers un sommet de I, il en reste au moins 4 parmi la réunion de E et M (en effet, au départ il y a 2 représentants en regard de chaque orientation ; tout pion posé élimine au plus 2 orientations ; avec 4 pions posés, il reste au plus $12 - 8 = 4$ orientations ; elles sont distinctes car sinon il resterait un rectangle) et $6 - 3 = 3$ parmi I : au moins 1 sera commune, nécessitant un pion supplémentaire.

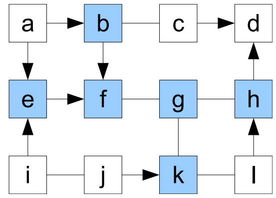
- Cas 2

  - Si les 2 pions de E se trouvent sur 2 sommets voisins, alors sur les 3 directions formées de 2 sommets diamétralement opposés de I, il en reste $6 - 2 - 1 = 3$ parmi E : la direction restante parmi I nécessite un pion supplémentaire.
  - Sinon les 2 pions de E se trouvent sur 2 sommets ni voisins, ni diamétralement opposés ; alors sur les 6 orientations allant de C vers un sommet de I, il en reste au moins 3 parmi la réunion de E et M (en effet, au moins 1 pion de M sera un voisin direct des 2 pions de E, puisque seuls 2 ne le sont pas ; il reste au moins $12 - 2 \times 4 - 1 = 3$ orientations), et $6 - 2 = 4$ parmi I : au moins 1 sera commune, nécessitant un pion supplémentaire.

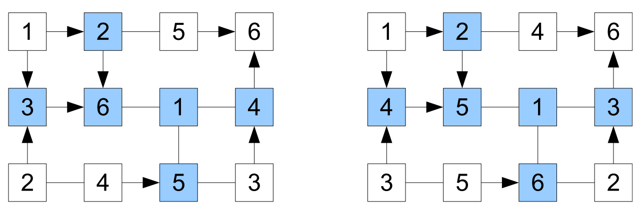
L'exemple suivant (où seuls les pions à éliminer sont matérialisés) montre que le minimum de 8 pions peut être atteint.



16 Auto-circuit



Pour qu'un nombre, utilisé deux fois, soit connecté une fois aux 5 autres nombres, il doit être sur une case de degré 2 (en blanc) et une de degré 3 (en bleu). Toutes les cases blanches possèdent une flèche sortante vers une case vide, sauf d. D'où $d = 6$. Le même raisonnement sur les cases bleues entraîne $6 = f$ ou k (g est écarté sinon h serait connecté deux fois à 6).
Remarquons que $a < b, e < f$ d'où $a \leqslant f - 3$. De la même façon $i \leqslant f - 2$ et $l \leqslant d - 2$.
Le même raisonnement sur le complémentaire des cases voisines aux 6 permet de placer un premier 5. Etant sur une case bleue, le deuxième 5 est donc sur une case blanche, voisine d'un 6, et n'ayant pas de voisin parmi ceux du 5 déjà placé.
Cas $f = 6$: $k = 5 = c$.
Cas $k = 6$: $f = 5 = j$.
Le 4 situé sur une case blanche ne peut être ni en a, ni en i, ni en l.
Cas $f = 6$: $j = 4$. Le deuxième 4 est sur une case bleue, voisine d'un 6 mais pas d'un 5, et n'ayant pas de voisin parmi ceux du 4 déjà placé : $h = 4$. Nous pouvons alors placer $a = 1 = g$, $e = 3 = l$ et $b = i = 2$.
Cas $k = 6$: $c = 4$. Le deuxième 4 est sur une case bleue, voisine d'un 5 mais pas d'un 6 ou du 4 déjà placé : $e = 4$. En raisonnant sur les couleurs et les voisins des nombres déjà placés, nous montrons alors que $b = l$, $h = i$ et $a = g$. Comme $a < b = l \leqslant 2$, alors $a = 1$ et $b = 2$, et le circuit se complète aisément.
Dans les 2 cas, nous vérifions que toutes les contraintes sont bien remplies.



17 La forêt de Poly Gone

A l'âge $n \geqslant 1$, on plantera $u_n = 1 + (n-1)(N-2)$ arbres. Depuis sa naissance, $v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = n\left[1 + \frac{(n-1)(N-2)}{2}\right]$ auront alors été plantés.
Puisque $N \geqslant 3$, nous avons $u_n \geqslant n$ et $\frac{n(n+1)}{2} \leqslant v_n = 1216 < 1225 = \frac{49 \times 50}{2}$.
Il faut donc résoudre l'équation $n\,[2 + (n-1)\,(N-2)] = 2432$ pour $4 < n < 49$.
D'où $2 \equiv 2432 \pmod{n-1}$ et donc $n \mid 2^7 19$ et $n - 1 \mid 2 \cdot 3^5 5$.
Examinons les cas $n = 8$, 16, 19, 32 ou 38.
Il reste 2 solutions $(n, N) = (16, 12)$ ou $(19, 9)$.

18 La suite de l'année

Considérons la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Rappelons la formule de Binet $f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]$.
La suite $f_n \pmod p$ est périodique : en effet, puisqu'il y a p^2 paires de résidus possibles, il suffit d'en considérer p^2+1 et d'appliquer le principe des tiroirs.
Si $1 \leqslant k \leqslant p-1$ avec p premier, alors le coefficient binomial C_p^k est divisible par p. En effet, $C_p^k = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$: puisque $0 < k < p$, le numérateur comporte bien un facteur p, contrairement au dénominateur.
De même, si $2 \leqslant k \leqslant p-1$ avec p premier, alors le coefficient binomial C_{p+1}^k est divisible par p.
La suite considérée ici u_n est telle que $u_{n+2} \equiv f_n \pmod{2012 = 2^2 503}$.
A l'aide du développement du binôme de Newton, la formule de Binet peut s'écrire $f_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} C_n^{2l+1} 5^l$.
5 n'est pas un résidu quadratique modulo 503 : en effet en utilisant le symbole de Legendre, $\left(\frac{5}{503}\right) = \left(\frac{503}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1$ car un carré ne se termine jamais par $3 \pmod 5$. En particulier, il en découle $5^{251} \equiv -1 \pmod{503}$ d'après le critère d'Euler.
Ainsi, à l'aide du petit théorème de Fermat donnant $2^{502} \equiv 1 \pmod{503}$, nous calculons $f_{503} \equiv 5^{251} \equiv -1$ et $f_{504} \equiv \frac{1}{2}\left(1 + 5^{251}\right) \equiv 0 \pmod{503}$.
D'où $f_{505} \equiv -f_1 \pmod{503}$ et alors $f_{n+1008} \equiv f_n \pmod{503}$.
Modulo 4, il est aisé d'évaluer directement la période : $f_2 \equiv 1$, $f_3 \equiv 2$, $f_4 \equiv 3$, $f_5 \equiv 1$, $f_6 \equiv 0$, $f_7 \equiv 1 \pmod 4$. Ainsi $f_{n+6} \equiv f_n \pmod 4$.
Comme $1008 = 6 \times 168$, alors $f_{n+1008} \equiv f_n \pmod{2012}$.
Puisque $2012 = 2 \times 1008 - 4$, alors $u_{2012} \equiv u_{-4} \equiv f_{-6} \pmod{2012}$: il suffit alors de remonter $f_{-1} = 1$, $f_{-2} = -1$, $f_{-3} = 2$, $f_{-4} = -3$, $f_{-5} = 5$ et $f_{-6} = -8$.
Finalement $u_{2012} \equiv 2004 \pmod{2012}$.