

27^e Championnat International
des Jeux Mathématiques et Logiques



Finale des 29 et 30 août 2013

Solutions (RAMA)

Jour 1 – Problème 1 – L'âge de Mathieu

- Mathieu est né le 1^{er} janvier 1987

2013
2012
2011
2010
2009
....
2000
1999
....
1990
1989
1988
1987

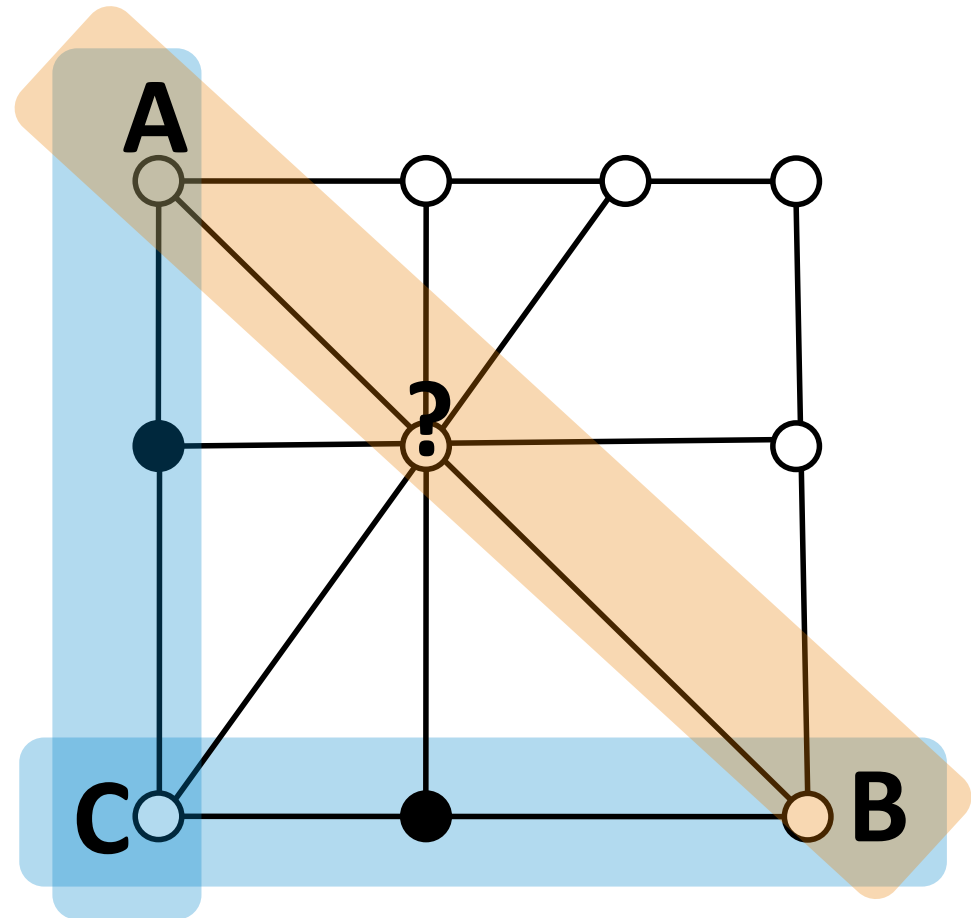
Jour 1 – Problème 1 – L'âge de Mathieu

- L'âge de Mathieu aujourd'hui est
 $2013 - 1987 = \mathbf{26 \text{ ans}}$

2013
2012
2011
2010
2009
....
2000
1999
....
1990
1989
1988
1987

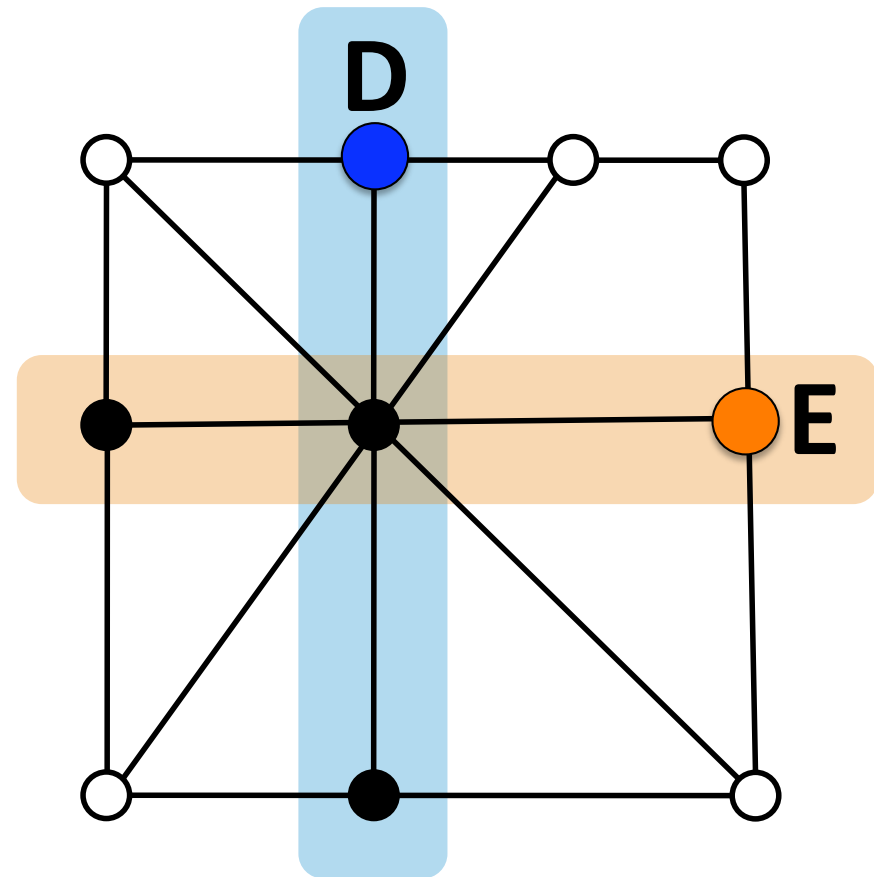
Jour 1 – Problème 2 – En noir et blanc

- Sur l'**alignement** vertical à gauche, le disque A est de même couleur que le disque C
- Sur l'**alignement** horizontal en bas, le disque B est de même couleur que le disque C
- Les disques A et B sont de même couleur
- Sur l'**alignement** diagonal auquel appartiennent les disques A et B, le disque ? doit être **noirci**



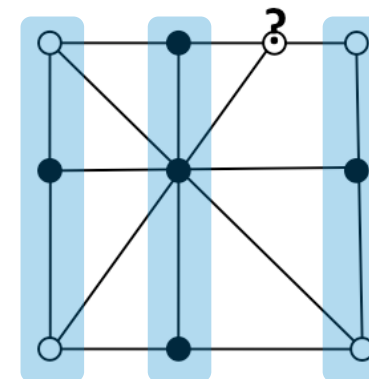
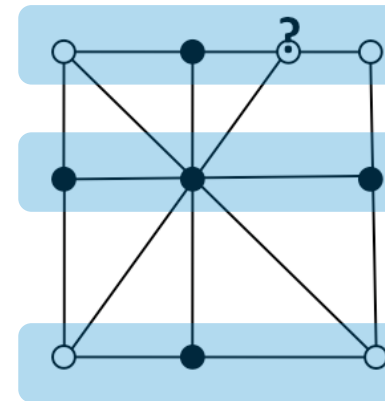
Jour 1 – Problème 2 – En noir et blanc

- Sur l'**alignement** vertical au milieu, le disque **D** doit être **noirci**
- Sur l'**alignement** horizontal au milieu, le disque **E** doit être **noirci**
- Cette réponse satisfait les conditions de l'énoncé
- *Nous continuons pour en vérifier l'unicité, ce qui n'était pas demandé à ce niveau*



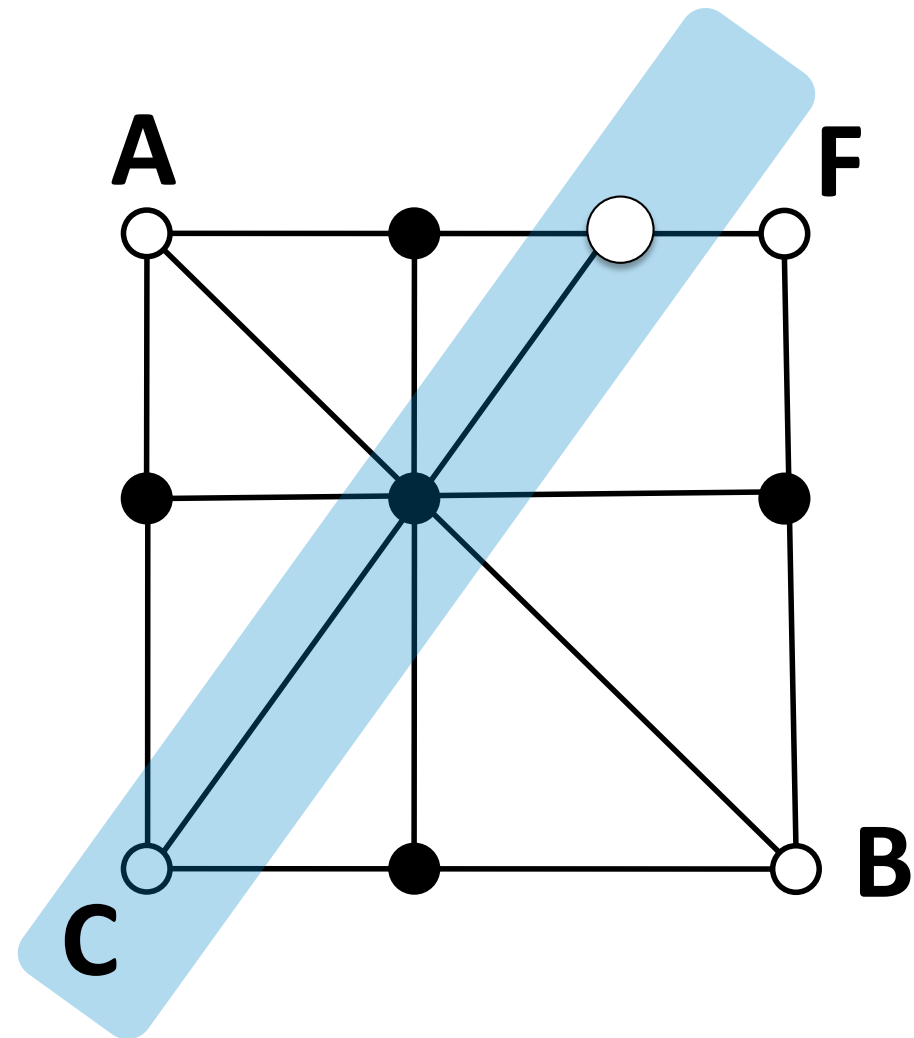
Jour 1 – Problème 2 – En noir et blanc

- *Le nombre total de disques noircis sur les trois alignements horizontaux, somme de trois nombres impairs, est impair*
- *Le nombre total de disques noircis sur les trois alignements verticaux, somme de trois nombres impairs, est impair*
- *La différence entre ces deux nombres est paire*
- *Le disque ? ne doit **pas** être **noirci***



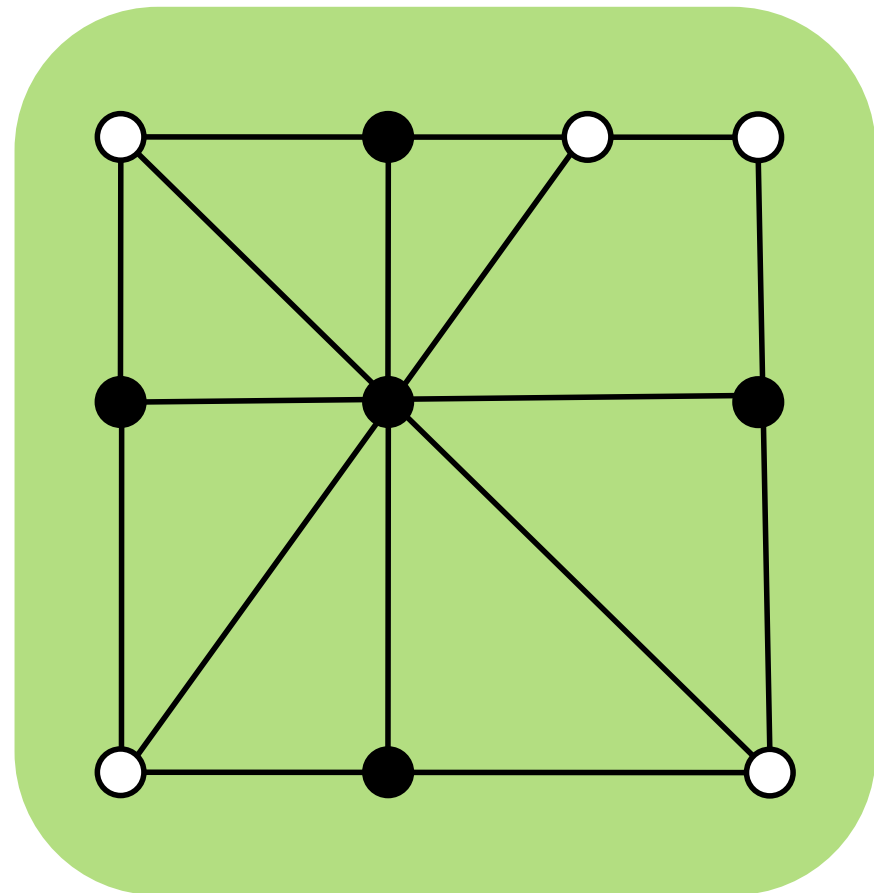
Jour 1 – Problème 2 – En noir et blanc

- Sur l'**alignement** diagonal auquel appartient le disque **C**, ce dernier ne doit **pas** être **noirci**
- Sur leurs alignements avec **C**, **A** et **B** ne doivent **pas** être **noircis**
- Sur les deux alignements auquel appartient le disque **F**, ce dernier ne doit **pas** être **noirci**



Jour 1 – Problème 2 – En noir et blanc

- *La réponse est bien unique*



Jour 1 – Problème 3 – Les piles de jetons

- Les quatre jetons situés entre deux jetons rapportent au maximum $4 \times 2 = 8$ points
- Si les deux jetons en bas et en haut de la pile touchent un jeton de couleur différente, alors le score ne peut pas dépasser $0 + 8 + 0 = 8$ points
- Si l'un des deux jetons en bas et en haut de la pile touche un jeton de couleur différente, et l'autre un jeton de même couleur, alors le score ne peut pas dépasser $0 + 8 + 3 = 11$ points

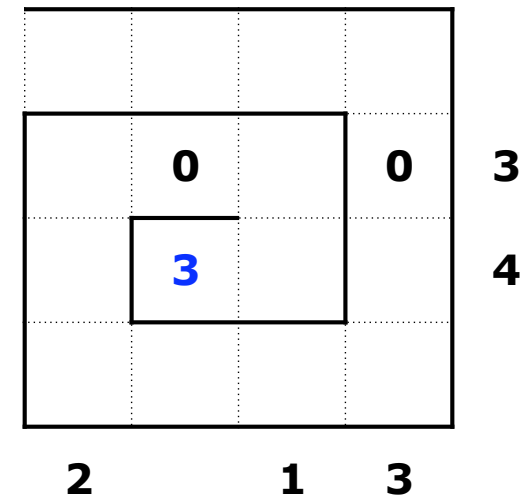
Jour 1 – Problème 3 – Les piles de jetons

- Si les deux jetons en bas et en haut de la pile touchent un jeton de même couleur, alors il reste deux jetons de couleurs différentes
- On atteint dans les quatre cas le meilleur score, **12**



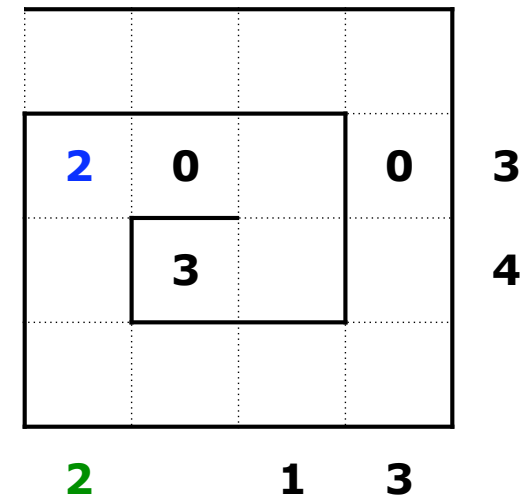
Jour 1 – Problème 4 – La spirale de l'année

- Le 2^{ème} **3** est après le 2^{ème} 0 dans la spirale
- Il n'est pas dans la colonne correspondante à l'indice 1



Jour 1 – Problème 4 – La spirale de l'année

- Dans la ligne correspondante à l'indice 3, il n'y a pas de 3 dans la colonne correspondante à l'indice 1
- Il y a forcément un nombre dans la colonne correspondante à l'indice 2
- C'est le 2^{ème} 2 (juste avant le 2^{ème} 0 dans la spirale)



Jour 1 – Problème 4 – La spirale de l'année

- Dans la ligne correspondante à l'indice **3**, il manque un **1**, le 2^{ème} dans la spirale

	2	0	1	0
		3		
	2		1	3

Jour 1 – Problème 4 – La spirale de l'année

- Dans la ligne correspondante à l'indice **4**, il manque un **1**, le 1^{er} dans la spirale
- Il n'est pas dans la colonne correspondante à l'indice 2 (déjà saturée)

	2	0	1	0
		3		1

2 1 3

3 4

Jour 1 – Problème 4 – La spirale de l'année

- Restent à placer le 1^{er} 2 et le 1^{er} 3 dans la spirale
- Dans la colonne correspondante à l'indice 3, il manque le 1^{er} 2 (juste avant le 1^{er} 0 dans la spirale)

			2	
2	0	1	0	3
	3		1	4
2		1	3	

Jour 1 – Problème 4 – La spirale de l'année

- Le 1^{er} **3** dans la spirale n'est pas dans les colonnes correspondantes aux indices 2, 1 et 3, ni dans la ligne correspondante à l'indice 4 (déjà saturées)

			2	
2	0	1	0	3
	3		1	4
	3			
2		1	3	

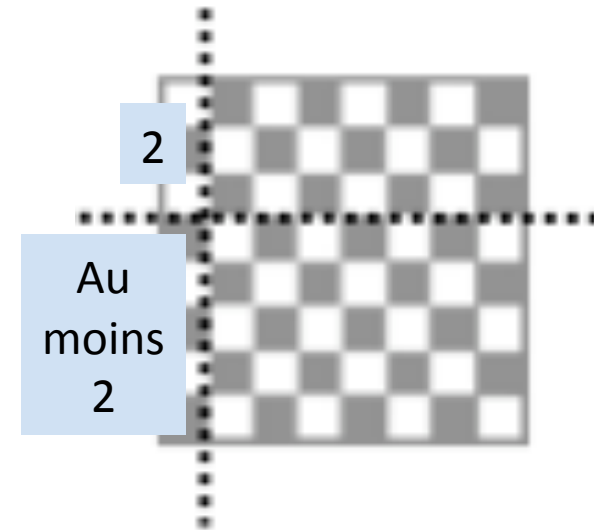
Jour 1 – Problème 4 – La spirale de l'année

- C'est l'unique réponse

				2	
	2	0	1	0	3
		3		1	4
		3			
	2		1	3	

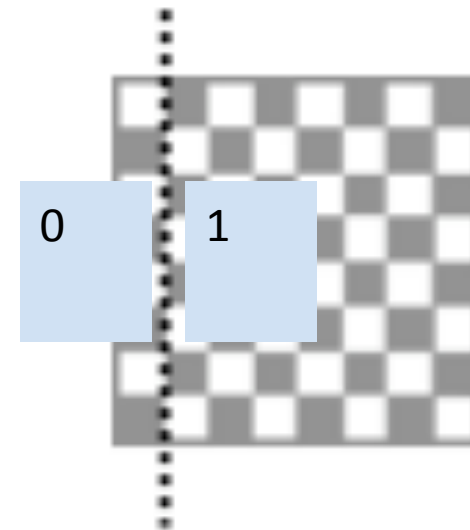
Jour 1 – Problème 5 – Les partages de l'échiquier

- Si une colonne ou ligne sur un bord de l'échiquier contient au moins 4 pièces, alors il existe un partage tel que les deux rectangles obtenus contiennent au moins deux pièces
- D'où une contradiction
- Plus généralement, n'importe quelle colonne ou ligne contient **au plus 3** pièces **(1)**



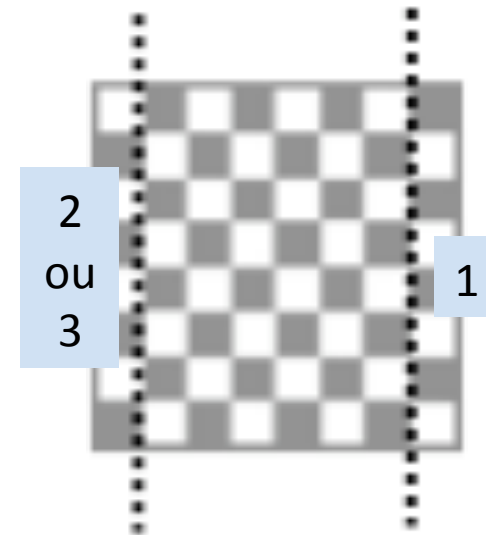
Jour 1 – Problème 5 – Les partages de l'échiquier

- Si une colonne ou ligne sur un bord de l'échiquier ne contient aucune pièce, alors il reste **1** pièce sur l'échiquier



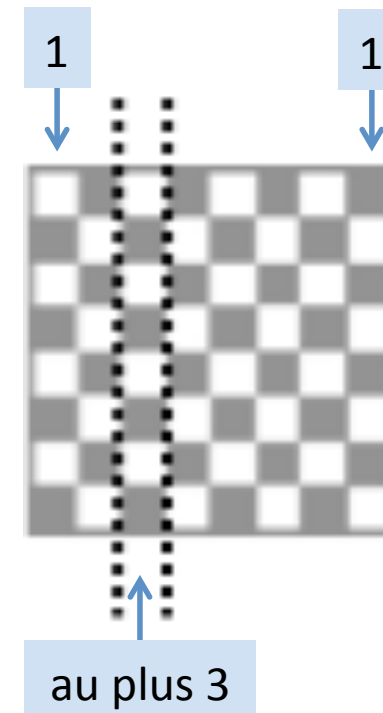
Jour 1 – Problème 5 – Les partages de l'échiquier

- Si une colonne ou ligne sur un bord de l'échiquier contient 2 ou 3 pièces, alors il y a une pièce dans la colonne ou ligne opposée et il reste **3** ou **4** pièces sur l'échiquier
- Pour qu'il reste **plus que 4** pièces, il faut **1 pièce sur chaque bord**



Jour 1 – Problème 5 – Les partages de l'échiquier

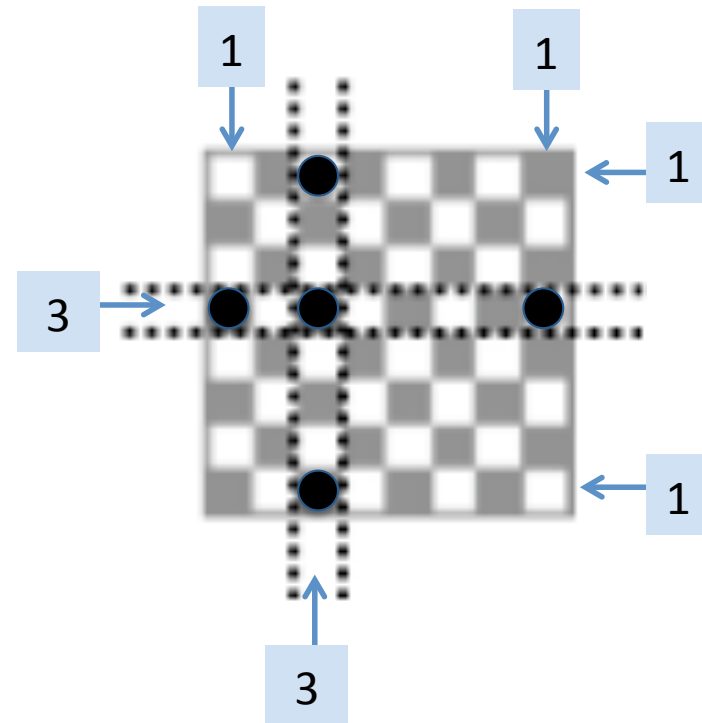
- En déplaçant le partage de gauche à droite, dès que l'on rencontre une colonne contenant au moins une pièce, le rectangle complétant l'échiquier à droite contient 1 pièce dans la dernière colonne à droite
- D'après **(1)**, la colonne rencontrée contient **au plus 3** pièces



Jour 1 – Problème 5 – Les partages de l'échiquier

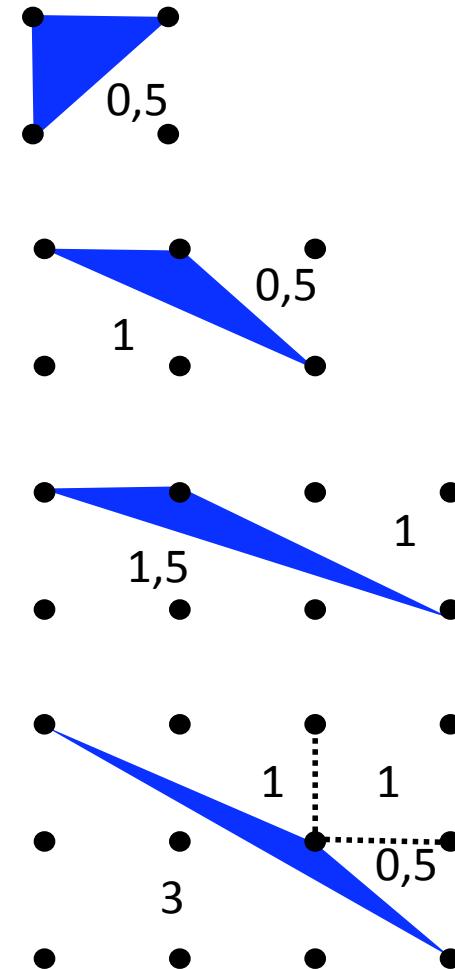
- Le même raisonnement peut être tenu en déplaçant le partage de bas en haut
- Il reste au maximum $1 + 3 + 1 = 5$ pièces sur l'échiquier

N.B. Il y a $6 \times 6 = 36$ dispositions déterminées par le centre de la croix, mais toutes ne correspondent pas à une fin de partie possible au jeu d'échecs



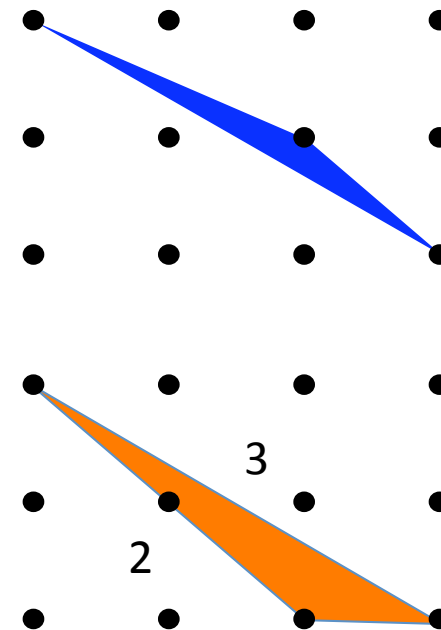
Jour 1 – Problème 6 – Les lamas

- La superficie d'un triangle est 0,5 ou 1 ou 1,5 ou 2 ou 3 (celle d'un petit carré du quadrillage est 1)
- Il y a quatre petits triangles dont la superficie est 0,5 (figure)
- La superficie du grand triangle étant 6, un découpage est théoriquement possible pour 8 lamas, mais à condition d'utiliser tous les petits triangles:
 $(4 \times 0,5) + (4 \times 1) = 2 + 4 = 6$



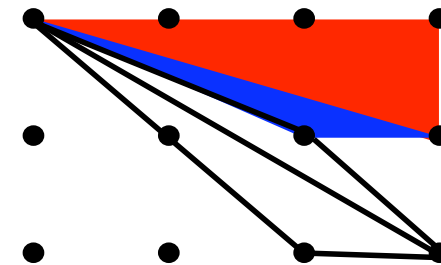
Jour 1 – Problème 6 – Les lamas

- Un petit triangle dont la superficie est **0,5** utilise une diagonale du grand rectangle (une seconde figure est possible par rotation de 180°)
- De l'autre côté, la diagonale ne peut être utilisée que d'une seule façon par un triangle dont la superficie est **1**



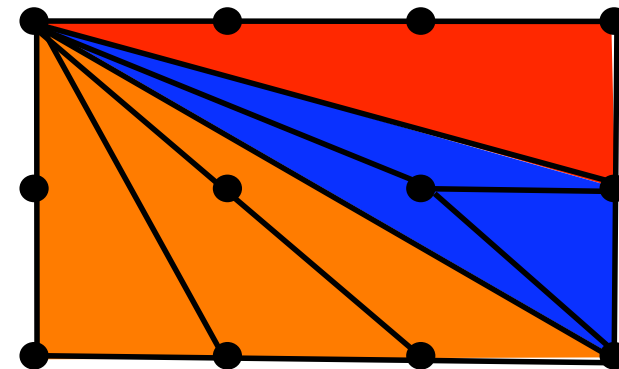
Jour 1 – Problème 6 – Les lamas

- Un petit triangle dont la superficie est **0,5** utilise une diagonale d'un rectangle 1 x 3
- Il ne peut être placé que d'une seule façon sans créer un doublon
- Mais alors le triangle rouge sur la figure, dont la superficie est **1,5**, ne peut plus être découpé sans créer un doublon
- D'où une contradiction: un découpage est impossible pour 8



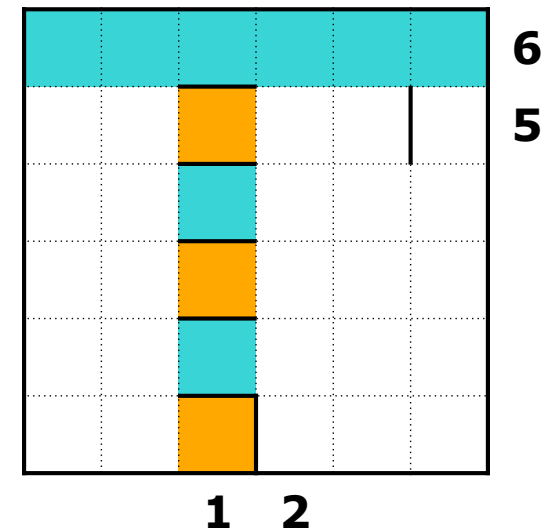
Jour 1 – Problème 6 – Les lamas

- Par contre, un découpage est possible pour **7** lamas, en utilisant trois petits triangles dont la superficie est **0,5**, trois triangles dont la superficie est **1** et un triangle dont la superficie est **1,5**:
 $(3 \times 0,5) + (3 \times 1) + (1 \times 1,5)$
 $= 1,5 + 3 + 1,5 = 6$
- C'est le maximum



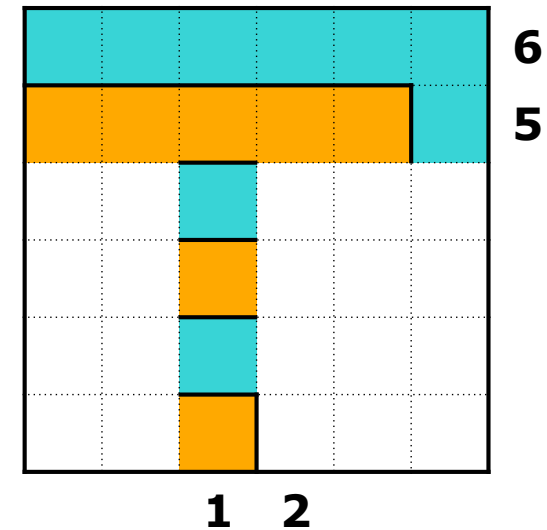
Jour 1 – Problème 7 – Connexion

- Nous allons colorier une partie en bleu, et l'autre en orange
- Sur la première ligne en haut (indice 6), toutes les cases appartiennent à la même partie
- Sur la troisième colonne à partir de la gauche (indice 1), les deux parties alternent



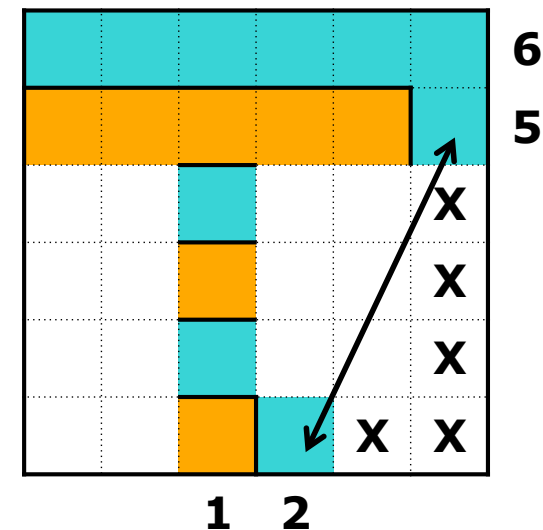
Jour 1 – Problème 7 – Connexion

- L'indice 5 et le trait de séparation donné nous permettent de colorier la ligne correspondante



Jour 1 – Problème 7 – Connexion

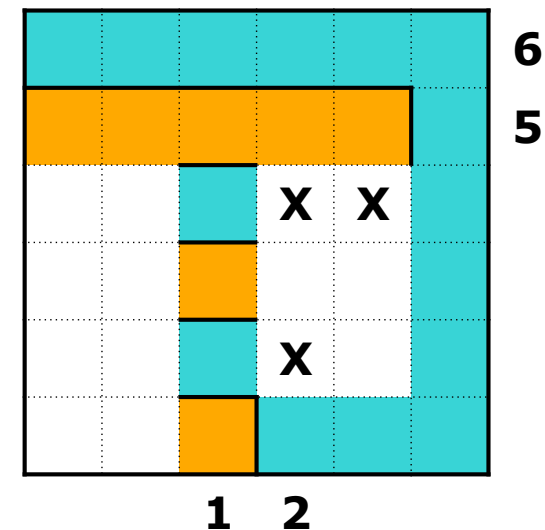
- Sur la dernière ligne en bas, le trait de séparation donné nous permet de colorier en bleu la case juste au dessus de l'indice 2
- Elle est connectée à la case de la dernière colonne à droite juste à gauche de l'indice 5
- Cela interdit de colorier en orange les 5 cases marquées d'une croix car elles ne seraient pas connectées aux autres



Jour 1 – Problème 7 – Connexion

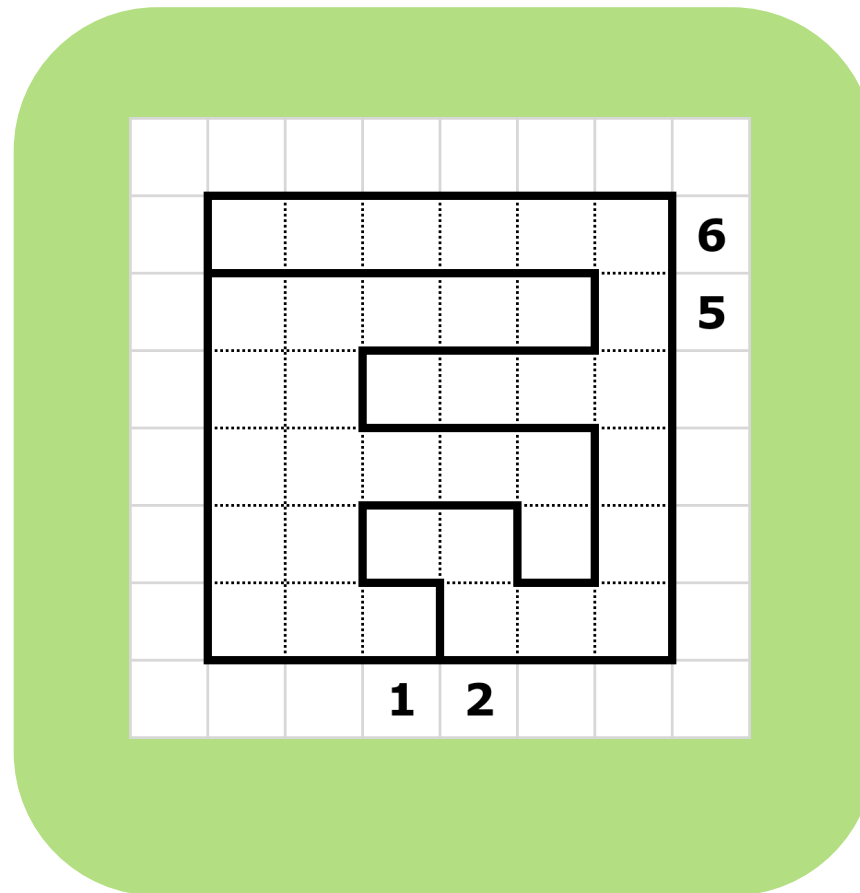
- 15 cases sont coloriées en bleu, il en reste $18 - 15 = 3$
- Pour connecter les 2 cases isolées sur la troisième colonne à partir de la gauche, il faut colorier en bleu les 3 cases marquées d'une croix

N.B. L'indice 2 est vérifié, mais il n'a pas été utilisé (il l'aurait été si les deux traits de séparation n'avaient pas été donnés)



Jour 1 – Problème 7 – Connexion

- C'est l'unique réponse



Jour 1 – Problème 8 – Jour de chance

- La somme des chiffres de 2013 est 6
- Il reste $13 - 6 = 7$ pour le mois et le jour

Mois	Somme des chiffres du jour
01	6
02	5
03	4
04	3
05	2
06	1
07	-
08	-
09	-
10	6
11	5
12	4

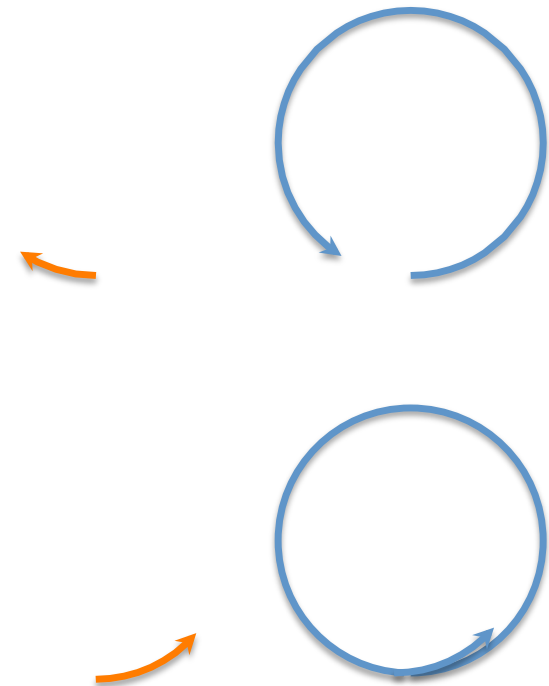
Jour 1 – Problème 8 – Jour de chance

- Y compris le 14 février 2013, il y a au total **29** jours dans l'année

Mois	Somme des chiffres du jour	Jours
01	6	06, 15 et 24
02	5	05, 14 et 23
03	4	04, 13, 22 et 31
04	3	03, 12, 21 et 30
05	2	02, 11 et 20
06	1	01 et 10
07	-	-
08	-	-
09	-	-
10	6	06, 15 et 24
11	5	05, 14 et 23
12	4	04, 13, 22 et 31

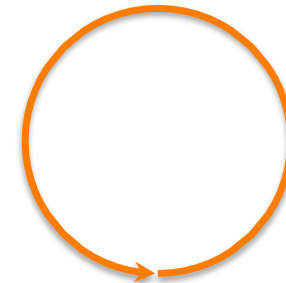
Jour 1 – Problème 9 – Le tour de l'île

- Prenons pour unité de longueur le tour de l'île
- Soient v et V les vitesses respectives de Jenna et de Mortimer, en tours de l'île par minute
- Pour le croisement: $6v = 1 - 6V$ (1)
- 8 minutes et 24 secondes font 8,4 minutes
- Pour le dépassement: $8,4v = 8,4V - 1$ (2)



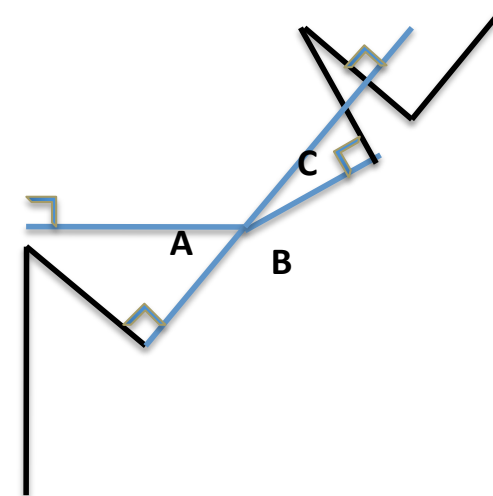
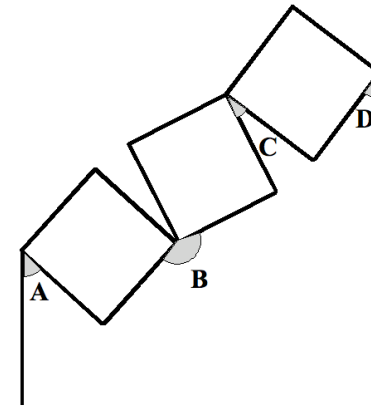
Jour 1 – Problème 9 – Le tour de l'île

- En additionnant les égalités **(1)** et **(2)**:
 $14,4 v = 2,4 V$
Soit $6 v = V$ **(3)**
- En reportant l'expression de V en fonction de v **(3)** dans l'égalité **(1)**:
 $6 v = 1 - 36 v$
Soit $42 v = 1$
- Jenna met **42** minutes pour faire un tour de l'île
(et Mortimer 6 fois moins, soit 7 minutes)



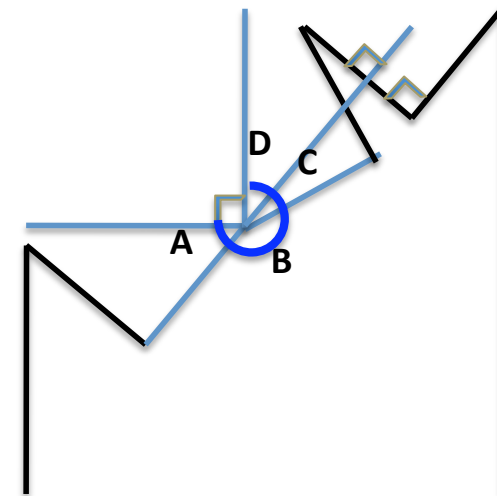
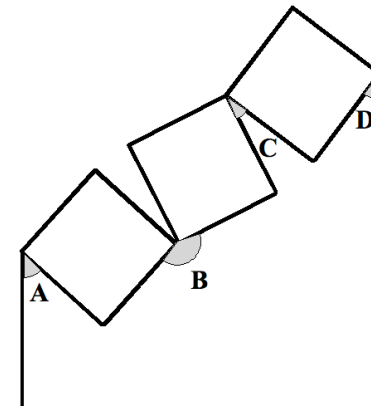
Jour 1 – Problème 10 – L'étendoir

- Deux angles ayant leurs côtés deux à deux perpendiculaires sont égaux (ou supplémentaires)
- Nous retrouvons A et C autour du sommet de B



Jour 1 – Problème 10 – L'étendoir

- Deux angles ayant leurs côtés deux à deux parallèles sont égaux (ou supplémentaires)
- Nous retrouvons D autour du sommet de B
- La somme des angles A, B, C et D est 270°



Jour 1 – Problème 10 – L'étendoir

- Il y a au moins un angle supérieur à 100° , sinon on utiliserait moins de neuf chiffres
- Il y a un seul angle supérieur à 100° , car on ne peut pas utiliser deux fois le 1 et $100 + 200 = 300$ est supérieur à 270
- C'est le plus grand des quatre angles
- Cet angle est inférieur à 200° , car la somme des chiffres des dizaines est au moins égale à $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ et $140 + 200 = 340$ est supérieur à 270

$$\begin{array}{r}
 \\
 + \\
 + \\
 + \quad 1
 \end{array}
 \begin{array}{rrr}
 & X & X \\
 & X & X \\
 & X & X \\
 & X & X \\
 \hline
 = & 2 & 7 & 0
 \end{array}$$

Jour 1 – Problème 10 – L'étendoir

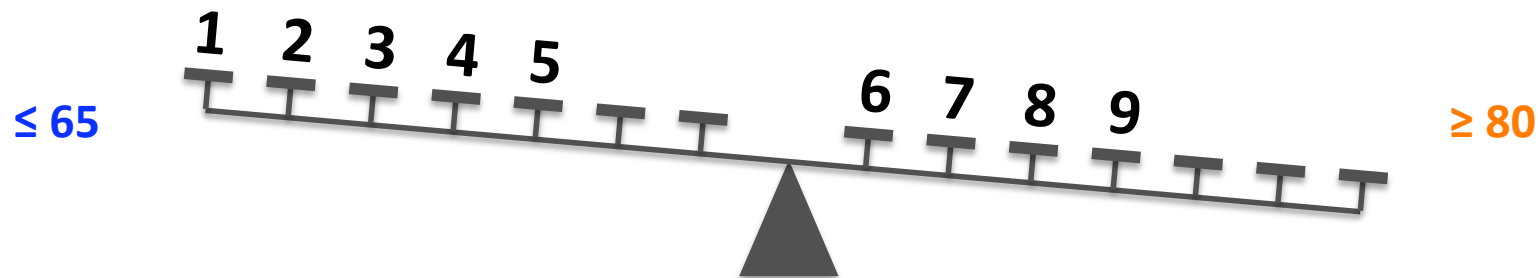
- La somme des chiffres des unités est 30
- Elle est forcément obtenue avec 6, 7, 8 et 9
- Le plus grand possible est 9
- Les chiffres des dizaines sont 2, 3, 4 et 5
- Le plus grand possible est 5
- La réponse est 159°

(1) (3)

$$\begin{array}{r} + \quad \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} 6 \\ \uparrow \\ 7 \\ \downarrow \\ 8 \end{array} \\ + \quad \quad \quad \\ + \quad 1 \quad 5 \quad 9 \\ \hline = \quad 2 \quad 7 \quad 0 \end{array}$$

Jour 1 – Problème 11 – Pèse nombres

- S'il y a au plus cinq masses à gauche
- On a au plus $1 \times 7 + 2 \times 6 + 3 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 3 = 65$ à gauche
- On a au moins $6 \times 1 + 7 \times 2 + 8 \times 3 + 9 \times 4 = 80$ à droite
- L'équilibre est impossible



Jour 1 – Problème 11 – Pèse nombres

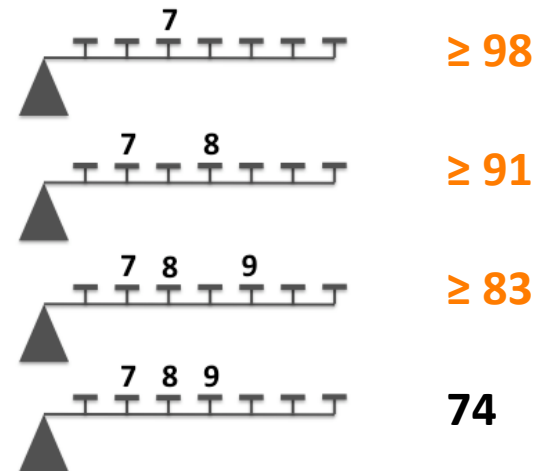
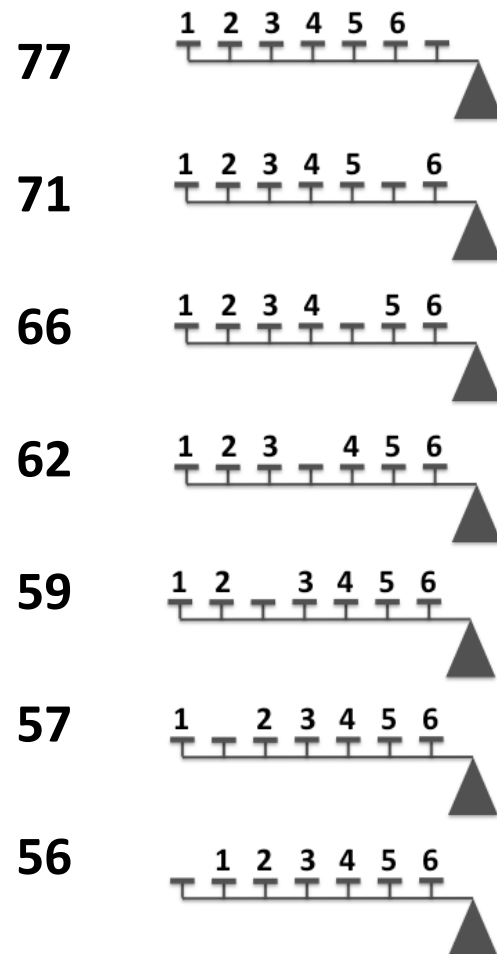
- S'il y a sept masses à gauche
- On a $1 \times 7 + 2 \times 6 + 3 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 7 \times 1 = 84$ à gauche
- On a $8a + 9(a+b) = 17a + 9b$, avec $1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6, (a+b) \leq 7$ à droite



- Le reste de la division de 84 par 9 est 3
- Le reste de la division de $17a + 9b$ par 9 est le même que celui de $8a$ ou $-a$
- $a = 9 - 3 = 6, b = 1, 17a + 9b = 111$
- L'équilibre est impossible

Jour 1 – Problème 11 – Pèse nombres

- Il y a six masses à gauche (7 cas) et trois à droite

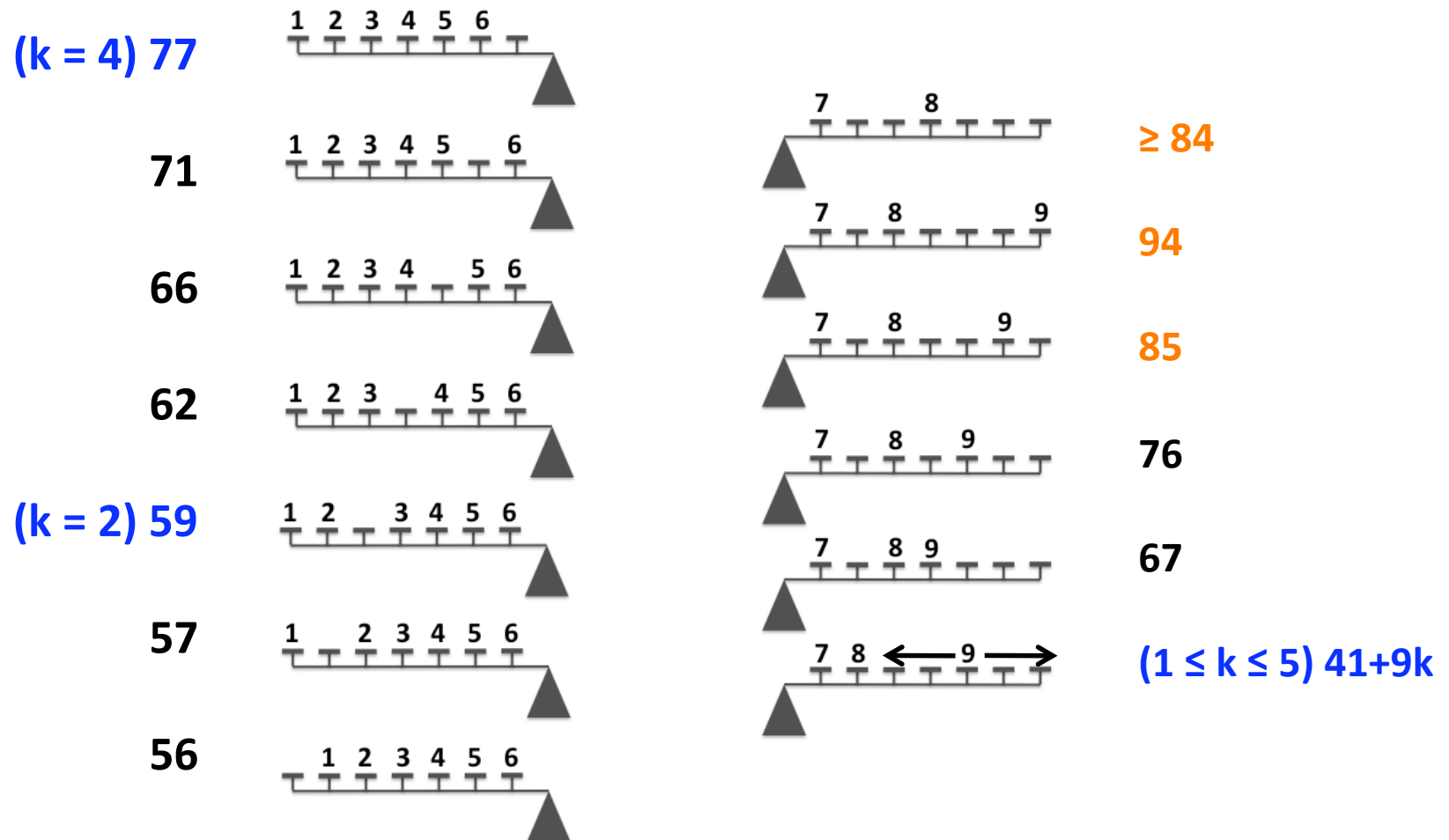


74

*À suivre
avec 7 sur le premier plateau*

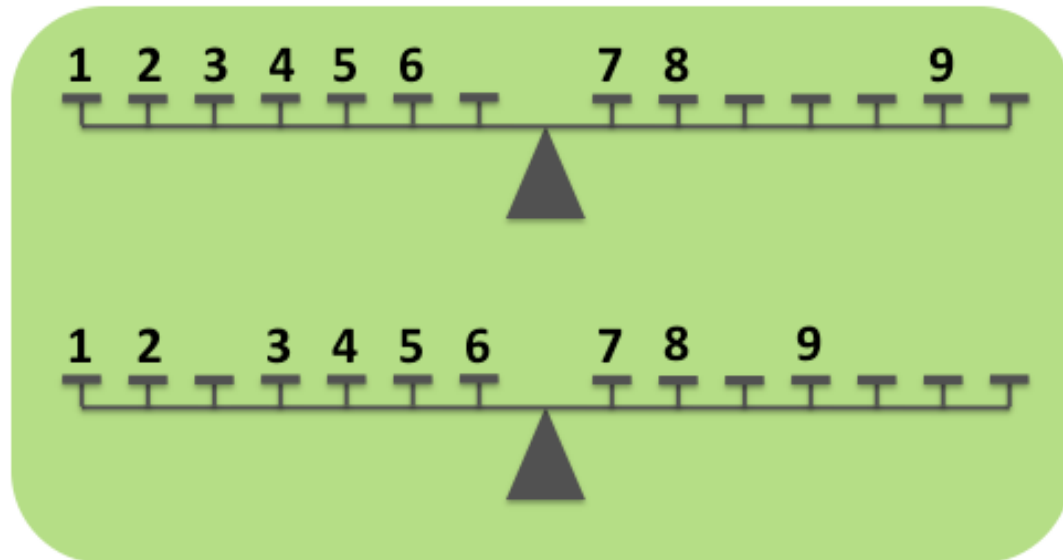
Jour 1 – Problème 11 – Pèse nombres

- Il y a six masses à gauche (7 cas) et trois à droite



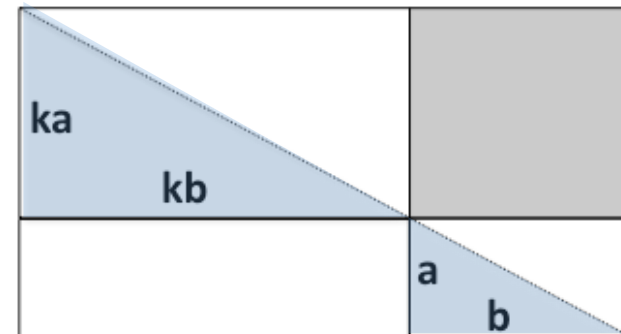
Jour 1 – Problème 11 – Pèse nombres

- Il y a deux réponses



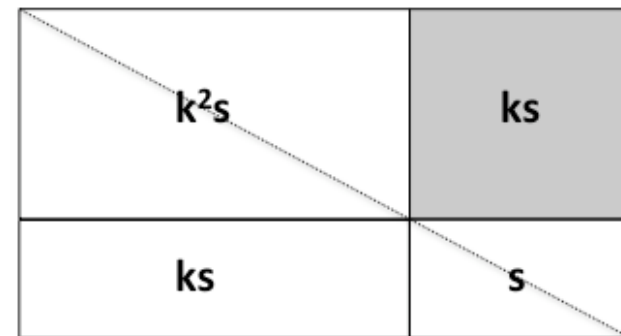
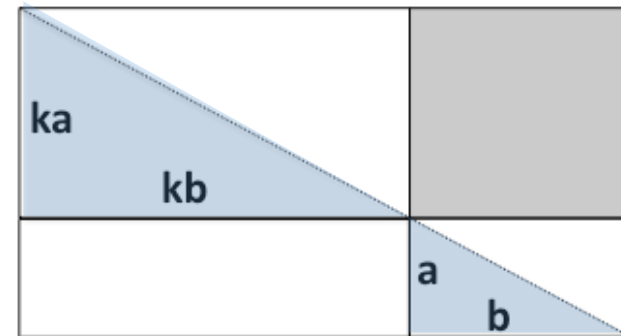
Jour 1 – Problème 12 – Le drapeau

- Les deux triangles en bleu sur la figure sont semblables (les angles sont les mêmes)
- D'où le facteur k



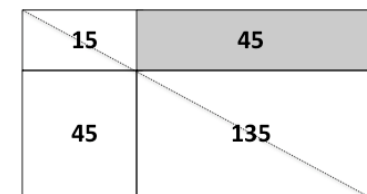
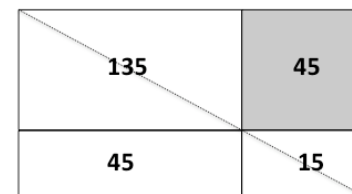
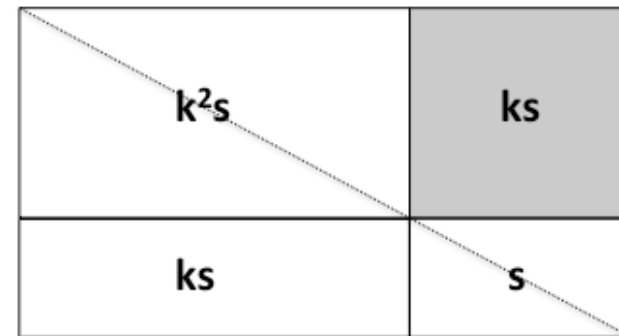
Jour 1 – Problème 12 – Le drapeau

- Soit $s = ab$
- ks , s et k^2s sont entiers
- $ks + s$ est également entier
- $k^2s + 2ks + s = 240$ (superficies)
- $[ks + s]^2 = 240s = 4^2 \times 15s$
- $s = 15n^2$, avec n est entier
- $15kn^2 + 15n^2 = ks + s = (4 \times 15)n$
- $kn + n = 4$ **(1)**



Jour 1 – Problème 12 – Le drapeau

- $kn + n = 4$ (1)
- Le sommet commun sur la diagonale étant en dehors de ses deux extrémités et de son milieu,
 $s = 15$ n² est différent de 0, 60 et 240
- n est différent de 0, 2 et 4
- $n = 1$ ou 3
- $k = 3$ ou $1/3$
- $s = 15$ ou 135
- L'unique réponse est $ks = \mathbf{45}$ dm²



Jour 1 – Problème 13 – Les trajets

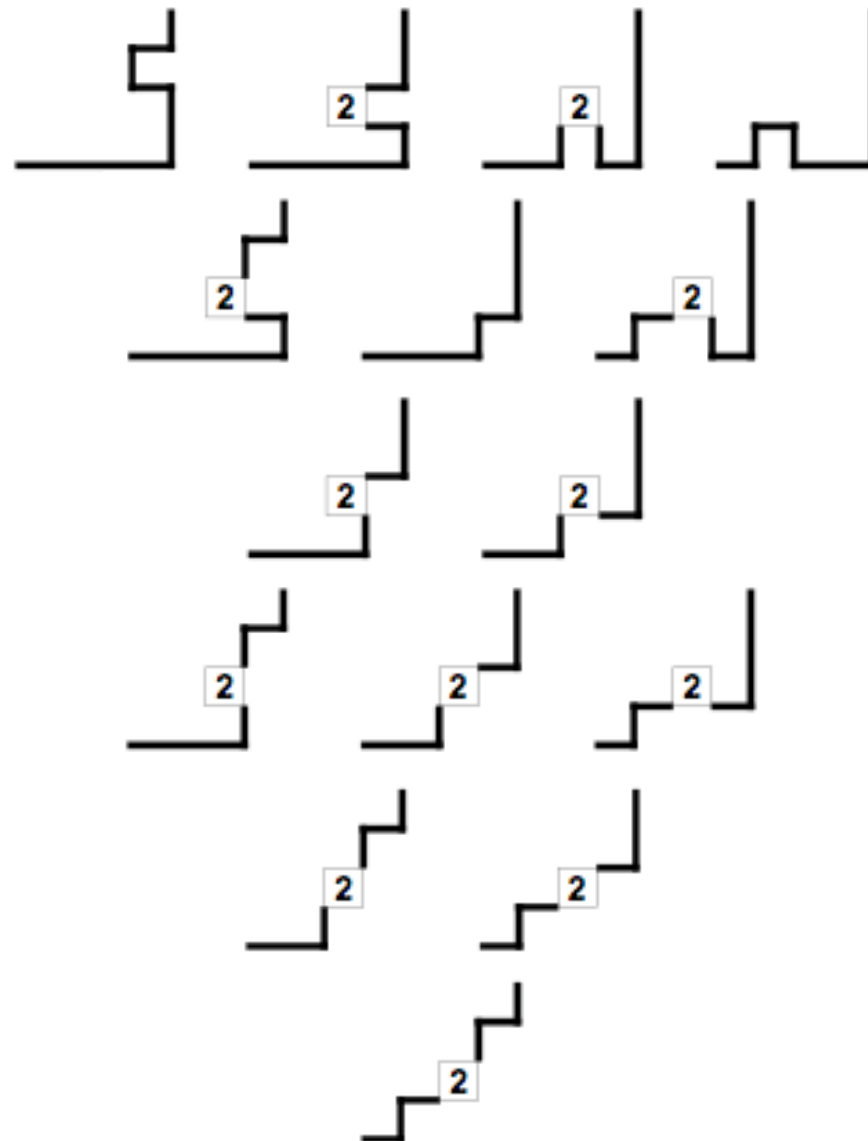
- Dénombrons en fonction du
nombre de trous le long du bas et de la droite

Sous total: 1



0 trou: 1

Jour 1 – Problème 13 – Les trajets



Sous total: 27

1 trou de 1: 6

1 trou de 2: 5

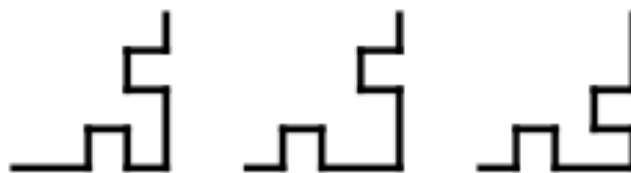
1 trou de 3: 4

1 trou de 4: 6

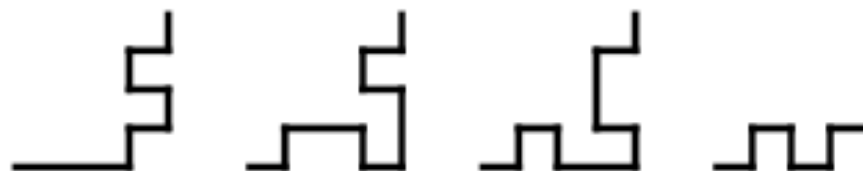
1 trou de 5: 4

1 trou de 6: 2

Jour 1 – Problème 13 – Les trajets



2 trous de 1: 3



1 trou de 1
et 1 trou de 2: 4

Sous total: 11



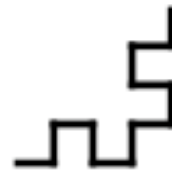
1 trou de 1
et 1 trou de 3: 2



1 trou de 1
et 1 trou de 4: 2

Jour 1 – Problème 13 – Les trajets

Sous total: 1

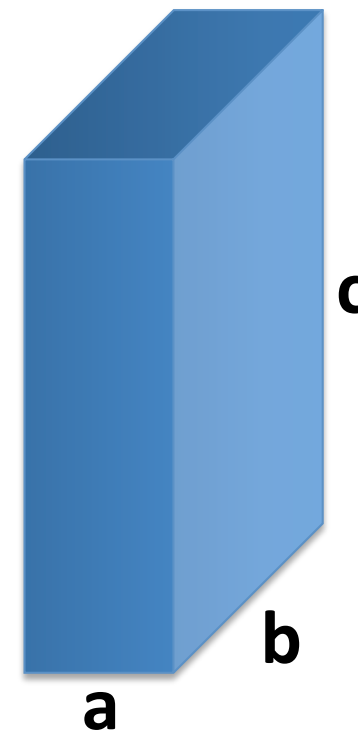


3 trous: 1

-
- La réponse est $1 + 27 + 11 + 1 = 40$

Jour 1 – Problème 14 – Trois fois « + 1 » égale « x 2 »

- Soient a , b et c les longueurs de côté, avec $a \leq b \leq c$
- **$(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$ (1)**
- Si a est au moins égal à 4
- **$8/5 = 2 - 2/5 \leq 2 - 2/(a+1) = 2a/(a+1)$**
- **$8/5 \leq (b+1)(c+1)/bc$ (d'après (1))**
- **$8/5 \leq 1 + 1/b + 1/c + 1/bc$**
- **$8/5 \leq 1 + 1/4 + 1/4 + 1/16 = 25/16$**
- **$128 = 8 \times 16 \leq 5 \times 25 = 125$**
- D'où une contradiction



Jour 1 – Problème 14 – Trois fois « + 1 » égale « x 2 »

- Si $a = 1$
 - $(b+1)(c+1) = bc$
 - $b + c + 1 = 0$
 - D'où une contradiction
-
- Si $a = 3$
 - $2(b+1)(c+1) = 3bc$
 - $c = 2 + 6/(b-2)$
 - $(b-2)$ divise 6 ($b \leq c$)
 - $b = 3$ ou 4 ne convient pas car le volume est divisible par 12

a	b	c	abc
3	3	8	72
3	4	5	60

Jour 1 – Problème 14 – Trois fois « + 1 » égale « x 2 »

- $a = 2$
 - $3(b+1)(c+1) = 4bc$
 - $c = 3 + 12/(b-3)$
 - $(b-3)$ divise 12 ($b \leq c$)
 - $b = 4$ ou 6 ne convient pas car le volume est divisible par 12
 - $b = 5$ donne l'unique réponse
-
- *Nous vérifions que $3 \times 6 \times 10 = 180$ est bien le double de 90*

a	b	c	abc
2	4	15	120
2	5	9	90
2	6	7	84

Jour 1 – Problème 15 – Autoréférence

- S'il y a **au moins un 6**
- Le produit des chiffres du nombre n'est pas divisible par 6
- D'où une contradiction
- Il n'y a **pas de 6**
- Le produit des chiffres du nombre est divisible par 6
- Le produit des chiffres du nombre est également divisible par 2
- Il n'y a **pas de 1**

12345 789

2345 789

Jour 1 – Problème 15 – Autoréférence

- S'il y a **au moins un 4**
- Aucun des chiffres du nombre n'est supérieur à 4
- Le nombre a au moins six chiffres (pas de 5)
- Au moins un chiffre est répété
- Il n'y a **pas de 3**
- D'où une contradiction (le produit des chiffres du nombre est divisible par 6 car il n'y a pas de 6)
- Il n'y a **pas de 4**

234

2 4

23 5 789

Jour 1 – Problème 15 – Autoréférence

A/ S'il n'y a pas de 2

3 5 789

- Le produit des chiffres du nombre est divisible par 6 (pas de 6)

- Il y a au moins un 8

3 5 789

- Il n'y a pas de 7 ni de 9 (à cause du 8, la différence entre deux chiffres du nombre n'est jamais égale à 1)

3 5 8

- Le produit des chiffres du nombre est divisible par 6 (pas de 6)

- Il y a au moins un 3

3 5 8

Jour 1 – Problème 15 – Autoréférence

A/ Toujours s'il n'y a pas de 2

3	5	8
---	---	---

- Il n'y a pas de 5 ($3 + 5 = 8$ est impossible car il n'y a pas de 9)
- Le nombre a au moins six chiffres
- Au moins un chiffre est répété
- D'où une contradiction (à cause du 3, aucun chiffre du nombre n'est égal à un autre)

3	8
---	---

B/ Il y a au moins un 2

23	5	789
----	---	-----

- Chacun des chiffres du nombre est inférieur au chiffre suivant

Jour 1 – Problème 15 – Autoréférence

- Aucun chiffre du nombre n'est égal à un autre, il y a **un 3**
- La différence entre deux chiffres du nombre (2 et 3) est 1
- Il n'y a **pas de 8**
- Le nombre a moins de six chiffres, il y a **un 5**
- Il y a **un 9** ($2+3 = 5$)
- Le nombre se termine par 9, il est impair, il n'y a **pas de 7**
- D'où l'unique réponse: **2359**

23 5 789

23 5 7 9

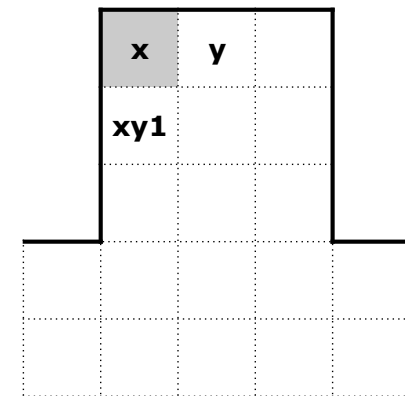
23 5 7 9

23 5 7 9

N.B. Si le 0 était permis, alors il y aurait une seconde solution (8005)

Jour 1 – Problème 16 – La croix de pharmacie

- On utilise le langage binaire (modulo 2) sans mentionner le signe de l'addition sur la croix
- Une variable x , y (z , t plus loin) indique si l'on a appuyé (1) ou non (0) sur la case correspondante
- On peut exprimer en fonction de ces variables le nombre de fois (modulo 2) que l'on a appuyé sur une autre case
- Par exemple, la case en haut et à gauche implique que l'on a appuyé $(x+y+1)$ fois sur la case juste au dessous car $x + y + (x+y+1) = 1 \pmod{2}$



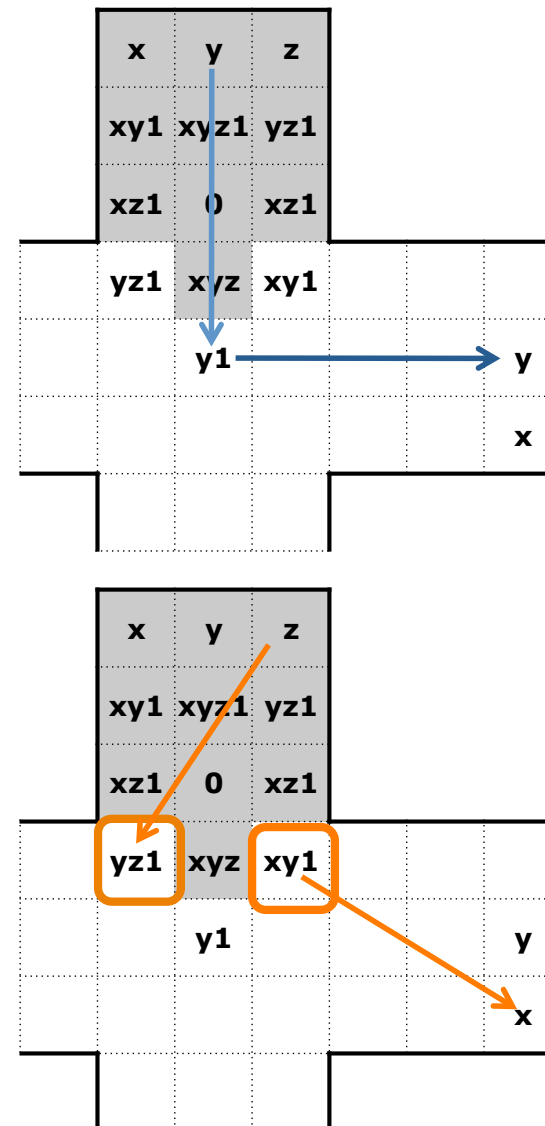
Jour 1 – Problème 16 – La croix de pharmacie

- Appuyer deux fois sur une case ne change rien, mais consomme inutilement deux secondes de plus
- L'objectif est de minimiser le nombre total de 1 sur la croix
- Commençons par le haut de la croix
- De proche en proche, on allume les cases grises sur la figure

	x	y	z	
	xy1	xyz1	yz1	
	xz1	0	xz1	
	yz1	xyz	xy1	
		y1		

Jour 1 – Problème 16 – La croix de pharmacie

- Continuons dans le sens des aiguilles d'une montre
- Par analogie (rotation de 90°), deux des trois variables de départ à droite sont forcées par les cases où se trouvent déjà **y1** et **xy1**



Jour 1 – Problème 16 – La croix de pharmacie

- Introduisons une nouvelle variable t
- De proche en proche, on allume les nouvelles cases grises sur la figure
- Pour allumer la case où se trouve **xy1**, il faut $xz1 \cdot xyz \cdot xy1 \cdot xt1 \cdot xyt = 1$, soit $y=x$

	x	y	z			
	xy1	xyz1	yz1			
	xz1	0	xz1			
	yz1	xyz	xy1	xt1	yt1	t
		y1	xyt	0	xyt1	y
			yt1	xt1	xy1	x

Jour 1 – Problème 16 – La croix de pharmacie

- Par analogie (axe de symétrie vertical), on aboutit également à la conclusion que $xz_1 = 1$, soit $z=x$
- Par analogie (rotation de 90°), $t=x$
- Finalement, toutes les variables de départ sont égales

x	x	z			
1	z1	xz1			
xz1	0	xz1			

	x	x	z			
	1	z1	xz1			
	xz1	0	xz1			
	xz1	z	1	xt1	xt1	t
		x1	t	0	t1	x
			xt1	xt1	1	x

Jour 1 – Problème 16 – La croix de pharmacie

- Pour que la case centrale soit allumée, il faut que $x1 = 1$, soit $x=0$
- Au total, le nombre de 1 est $5 \times 5 = 25$
- C'est la réponse

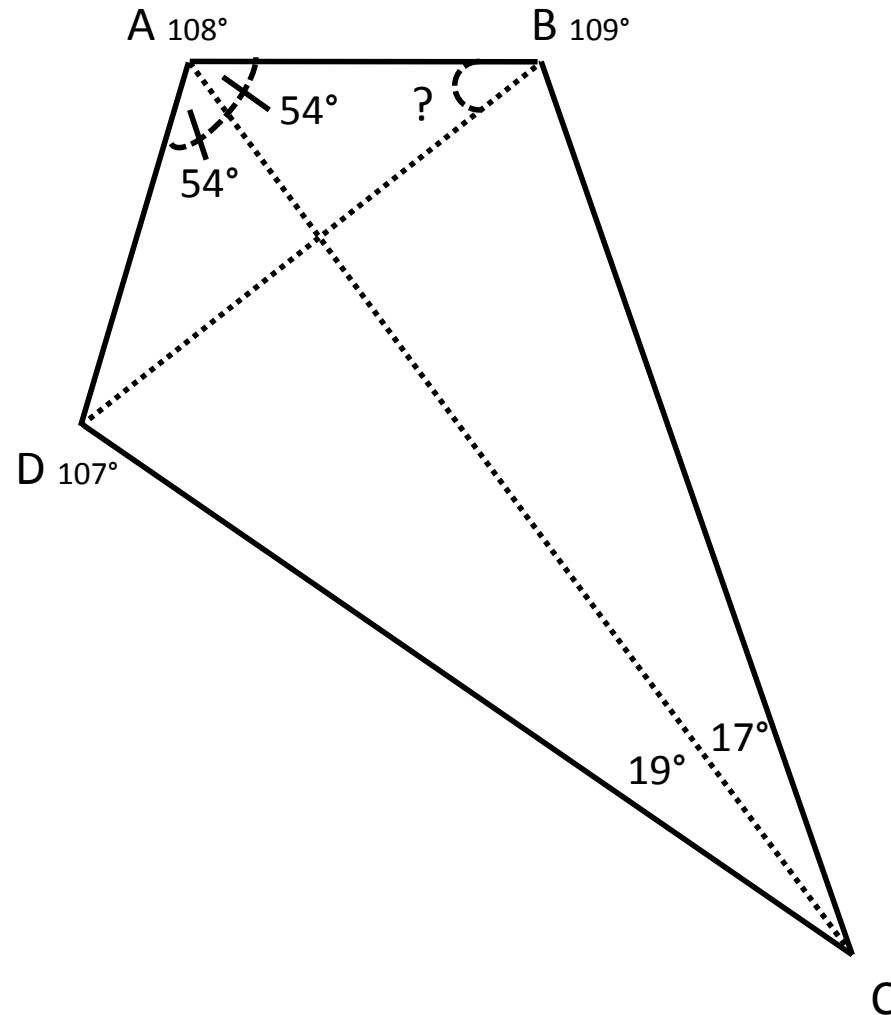
				x	x	x		
				1	x1	1		
				1	0	1		
x	1	1	1	x	1	1	1	x
x	x1	0	x	x1	x	0	x1	x
x	1	1	1	x	1	1	1	x
				1	0	1		
				1	x1	1		
				x	x	x		

				0	0	0		
				1	1	1		
				1	0	1		
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0
				1	0	1		
				1	1	1		
				0	0	0		

N.B. Les cases sur lesquelles on a appuyé sont la case centrale et une croix réduite, mais l'invariance par rotation n'était pas assurée a priori

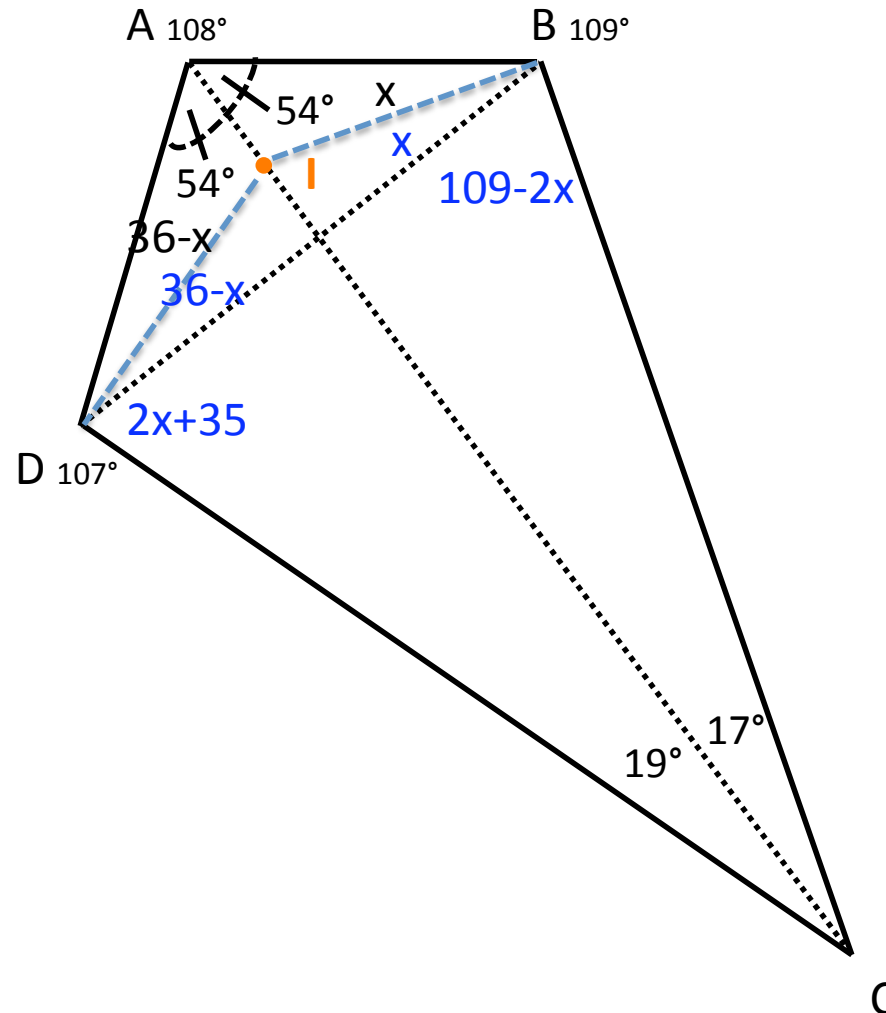
Jour 1 – Problème 17 – Le cerf-volant

- Les angles DAC et CAB mesurent chacun 54° (bissectrice)
- L'angle BCA mesure $180 - 109 - 54 = 17^\circ$
- L'angle ACD mesure $180 - 107 - 54 = 19^\circ$



Jour 1 – Problème 17 – Le cerf-volant

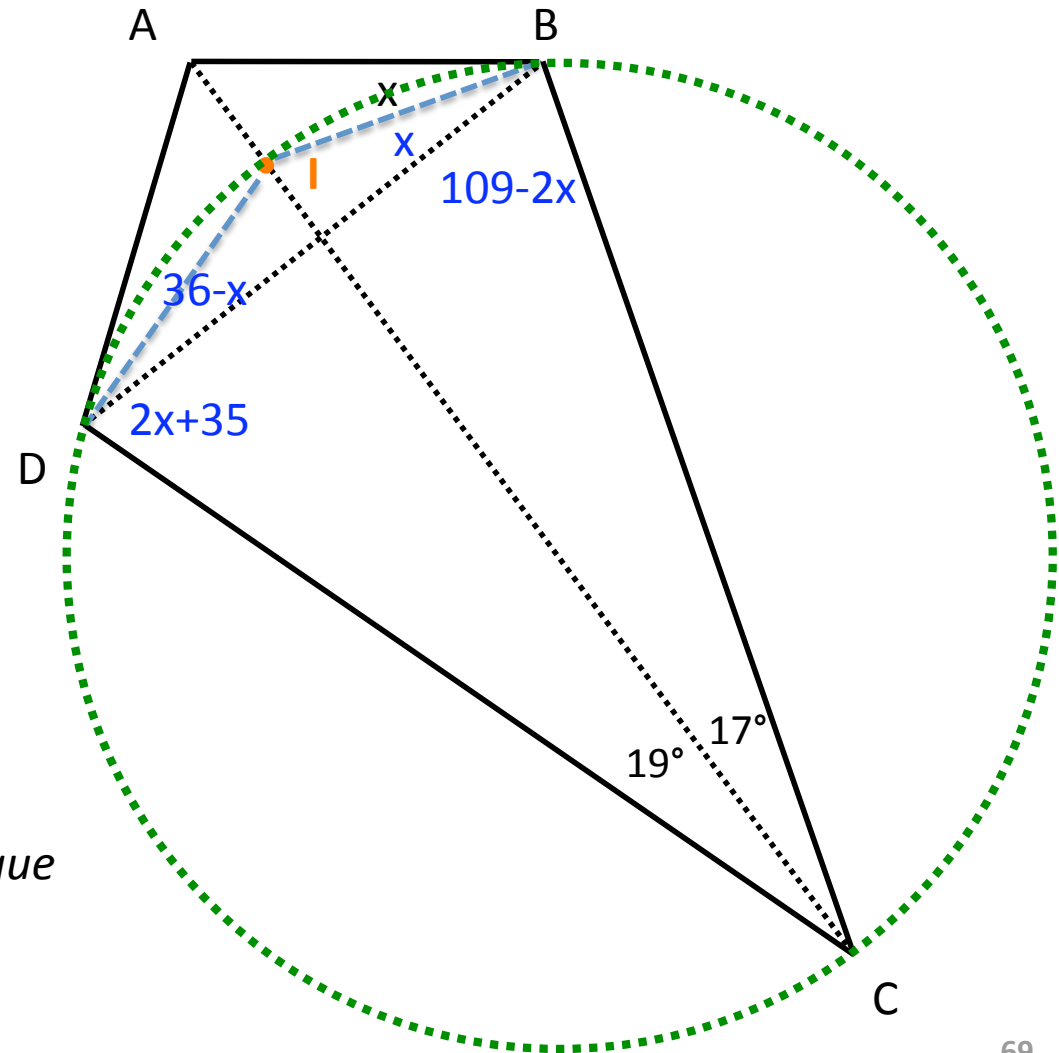
- Soit I le point de concours des bissectrices du triangle ABD
- On nous demande $2x$
- Aux sommets B et D , complétons les angles en fonction de x



Jour 1 – Problème 17 – Le cerf-volant

- Les angles IBC et CDI sont supplémentaires car
 $(x+109-2x) + (36-x+2x+35) = 180^\circ$
- I, B, C et D sont cocycliques
- Les angles inscrits IBD et ICD sont égaux, $x = 19^\circ$
- La réponse est
 (exactement) $2x = \mathbf{38^\circ}$

N.B. La « magie » vient de ce que les angles ont été choisis de façon que $D + B + A/2 = 270^\circ$



Jour 1 – Problème 18 – La répartition divine

- Les deux fonctions A et B , de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$, sont **(1)** croissantes et **(2)** telles que chaque entier positif ait un antécédent par l'une ou l'autre; **(3)** elles satisfont $B(n) = A(A(n)) + 1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
A(n)	1	3	4	6	8	9	11	12	...
B(n)	2	5	7	10	13	...			

- Ces fonctions sont constructibles de proche en proche
- Lorsque nous sommes arrivés à $N+P$ pour B , deux cas se présentent selon que P est suivi par $P+1$ ou par $P+2$

n	...	N	N+1	...	P	P+1	...
A(n)	...	P	P+1	...	N+P-1	N+P+1	...
B(n)	...	N+P	N+P+2	...			

n	...	N	N+1	...	P	P+1	P+2	...
A(n)	...	P	P+2	...	N+P-1	N+P+1	N+P+2	...
B(n)	...	N+P	N+P+3	...				

Jour 1 – Problème 18 – La répartition divine

- Observons que $B(n) = A(A(n)) + 1 = A(n) + n$, « $A^2 = A + 1$ »
- Pour $n=10$ (dernière valeurs données par l'énoncé pour $A(n)$ et $B(n)$), observons également que $A(n)/n = 16/10 = 1,6$ et $B(n)/n = 26/10 = 2,6$
- Les valeurs prises sont voisines de ϕ et de ϕ^2 , où ϕ est le nombre d'or
- $\phi^2 = \phi + 1$, $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$ ($\sqrt{5} \approx 2,236$ est donné par l'énoncé)
- D'où l'idée de tenter les formules générales suivantes, où E désigne la fonction partie entière: $A(n) = E(n\phi)$ et $B(n) = E(n\phi^2)$
- D'après ce qui précède (unicité si existence), il nous suffit de démontrer que ces deux fonctions satisfont les **trois conditions**

Jour 1 – Problème 18 – La répartition divine

- Les deux fonctions sont croissantes (1)
- Si l'on accole un intervalle de largeur $1/\phi$ et un intervalle de largeur $1/\phi^2$, alors la largeur totale est 1 et l'un des deux intervalles contient un entier
- Appliquons ceci aux intervalles $[p/\phi - 1/\phi^2, p/\phi]$ et $[p/\phi, p/\phi + 1/\phi]$ (leurs bornes sont irrationnelles)
- En observant que $p - p/\phi = p/\phi^2$, il vient qu'un et un seul des intervalles $[p/\phi^2, p/\phi^2 + 1/\phi^2]$ et $[p/\phi, p/\phi + 1/\phi]$ contient un entier n
- n appartient au premier intervalle si et seulement si $E(n\phi^2) = p$
- n appartient au second intervalle si et seulement si $E(n\phi) = p$
- Chaque entier positif p a ainsi un antécédent par l'une ou l'autre des deux fonctions (2)

Jour 1 – Problème 18 – La répartition divine

$$E(n\phi^2) = E(E(n\phi)\phi) + 1$$

$$\Leftrightarrow E(n\phi^2) - 1 \leq E(n\phi)\phi < E(n\phi^2)$$

$$\Leftrightarrow n + E(n\phi) - 1 \leq E(n\phi)\phi < n + E(n\phi)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \leq E(n\phi) (\phi - 1) < n$$

$$\Leftrightarrow n\phi - \phi \leq E(n\phi) < n\phi$$

$$\Leftrightarrow E(n\phi) < n\phi \text{ et } n\phi \leq E(n\phi) + 1 + (\phi - 1)$$

- La première inégalité est vérifiée par définition de E ($n\phi$ est irrationnel)
- La seconde inégalité est également vérifiée par définition de E (il ne peut pas y avoir égalité)
- $B(n) = A(A(n)) + 1$ **(3)**
- La solution est $E(2013\phi) \approx E(3257,034) = \mathbf{3257}$

Jour 2 – Problème 1 – 2, 3 et 4

- Dans la colonne de l'indice 7, il y a forcément le second **2** et un **3** (sinon, la somme des trois nombres serait au moins 8)

4		2	10
		&	
		3	
		2	8

7

↑

Jour 2 – Problème 1 – 2, 3 et 4

- Dans la ligne de l'indice 8,
il n'y a plus de 2 possible
- Il y a forcément les deux autres **3**
(sinon, la somme des trois nombres
serait au moins 9)

4		2	10
		&	
		3	
3	3	2	8 ←
		7	

Jour 2 – Problème 1 – 2, 3 et 4

- On écrit les trois autres 4

4	4	2	10
		&	
4	4	3	
3	3	2	8
7			

Jour 2 – Problème 1 – 2, 3 et 4

- Dans la ligne de l'indice 10, il y a forcément le second **2** (sinon, la somme des trois nombres serait 11)

4	4	2	10	
4	4	3		
3	3	2	8	
		7		

Jour 2 – Problème 1 – 2, 3 et 4

- C'est l'unique réponse

4	4	2	10
4	4	3	
3	3	2	8
		7	

Jour 2 – Problème 2 – De un

- Il y a forcément des 2 à côté des 3

1							
				2	0	1	3
							2
				3	2	2	3

Dominos restants: 0-0, 0-1, 0-3, 1-1, 1-2 et 3-3.

Jour 2 – Problème 2 – De un

- Le domino 1-3 est déjà placé
- Il y a forcément un 3 à côté du 2
- Il y a forcément un 2 à côté du 3

1							
				2	0	1	3
			2	3			2
				3	2	2	3

Dominos restants: 0-0, 0-1, 0-3, 1-1 et 1-2.

Jour 2 – Problème 2 – De un

- Le domino 2-3 est déjà placé
- Il y a forcément un **1** à côté du 2

1							
			1	2	0	1	3
			2	3			2
				3	2	2	3

Dominos restants: 0-0, 0-1, 0-3 et 1-1.

Jour 2 – Problème 2 – De un

- Tous les 2 sont déjà placés
- Il y a forcément des 0 à côté des 1
- Il y a forcément un 3 à côté du seul 2 disponible (domino 0-3)

1			0				
0			1	2	0	1	3
	0	3	2	3			2
				3	2	2	3

Dominos restants: 0-0, 0-1 et 1-1.

Jour 2 – Problème 2 – De un

- Il y a forcément un **1** à côté du 0 (domino 0-1)
- Les dominos **0-0** et **1-1** sont forcément placés

1	1	0	0				
0			1	2	0	1	3
1	0	3	2	3			2
				3	2	2	3

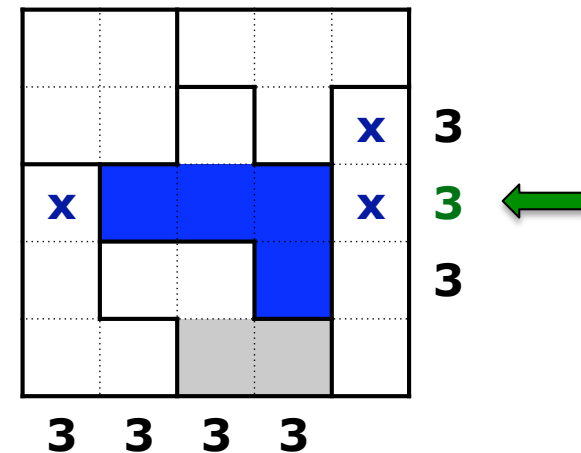
Jour 2 – Problème 2 – De un

- C'est l'unique réponse

1	1	0	0				
0			1	2	0	1	3
1	0	3	2	3			2
				3	2	2	3

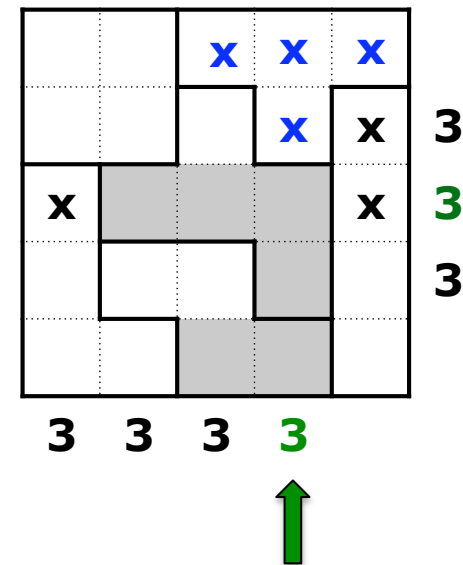
Jour 2 – Problème 3 – Les réservoirs d'eau

- Le 3 de la ligne du milieu ne peut être obtenu qu'en noircissant les cases des deuxième, troisième et quatrième colonnes à partir de la gauche
- Dans le même réservoir, la case au dessous est forcément remplie d'eau
- Les cases cochées **X** restent vides



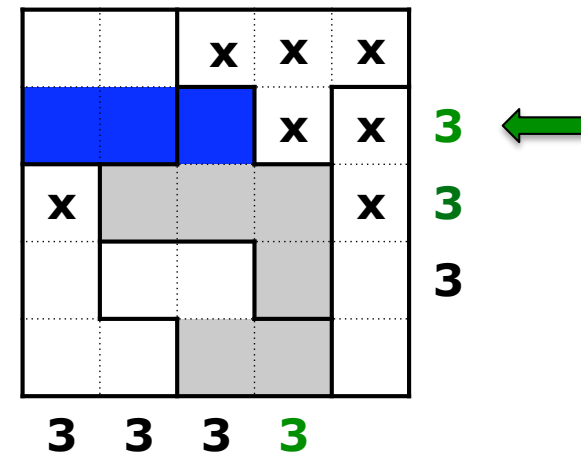
Jour 2 – Problème 3 – Les réservoirs d'eau

- Le 3 de la quatrième colonne à partir de la gauche a été obtenu
- Les cases cochées **X** restent vides



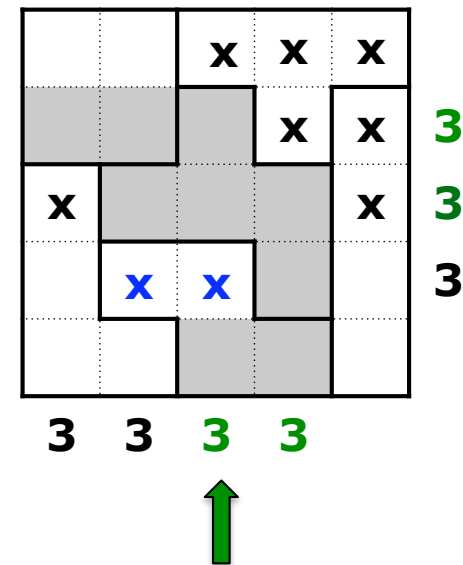
Jour 2 – Problème 3 – Les réservoirs d'eau

- Le 3 de la deuxième ligne à partir du haut ne peut être obtenu qu'en noircissant les trois cases disponibles



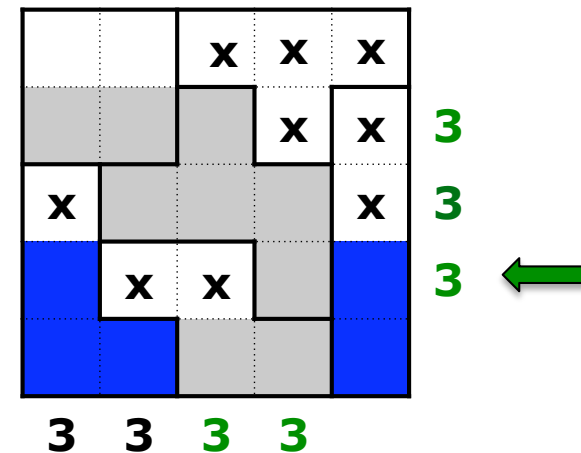
Jour 2 – Problème 3 – Les réservoirs d'eau

- Le 3 de la troisième colonne à partir de la gauche a été obtenu
- Les cases cochées **X** restent vides



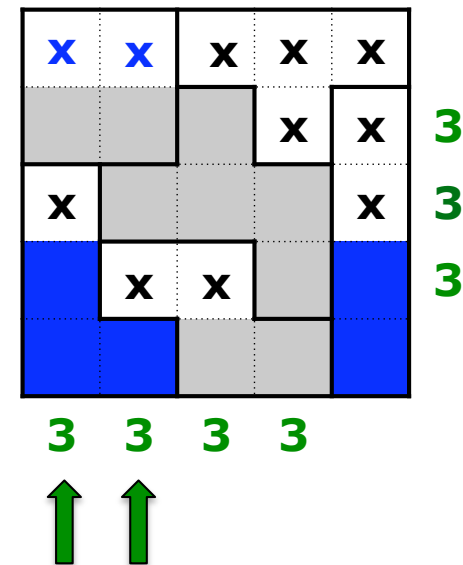
Jour 2 – Problème 3 – Les réservoirs d'eau

- Le 3 de la quatrième ligne à partir du haut ne peut être obtenu qu'en noircissant les deux cases disponibles
- Les trois cases au dessous sont forcément remplies d'eau



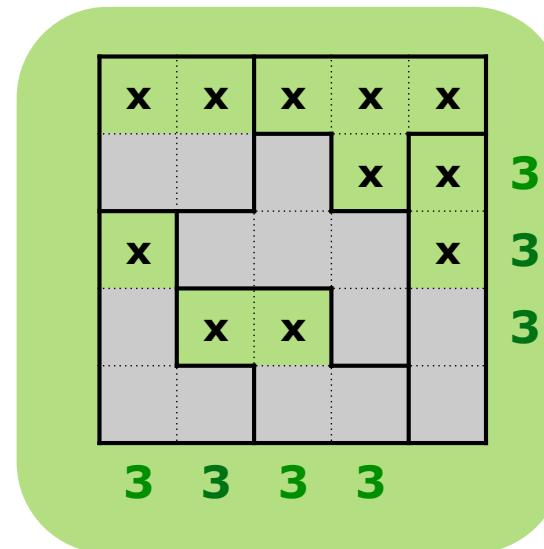
Jour 2 – Problème 3 – Les réservoirs d'eau

- Les 3 des deux premières colonnes à partir de la gauche ont été obtenus, les cases cochées **X** restent vides



Jour 2 – Problème 3 – Les réservoirs d'eau

- C'est l'unique réponse



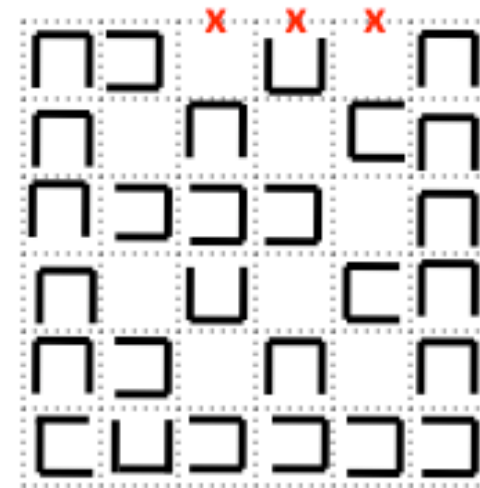
Jour 2 – Problème 4 – Les fers à cheval

- Le nombre de côtés de petit carré étant un multiple de 3 ($6 \times 7 \times 2 = 3 \times 28$), il pourrait être possible de couvrir complètement le quadrillage avec des fers à cheval (28)
- Si c'était le cas, alors les côtés de petit carré sur le bord du quadrillage forceraient, en partant d'un coin, dans ce sens *ou dans l'autre*, la figure *ou son retournement*
- Mais alors, en partant du nœud (**orange**), cela forcerait deux fers à cheval à se longer par un **côté**



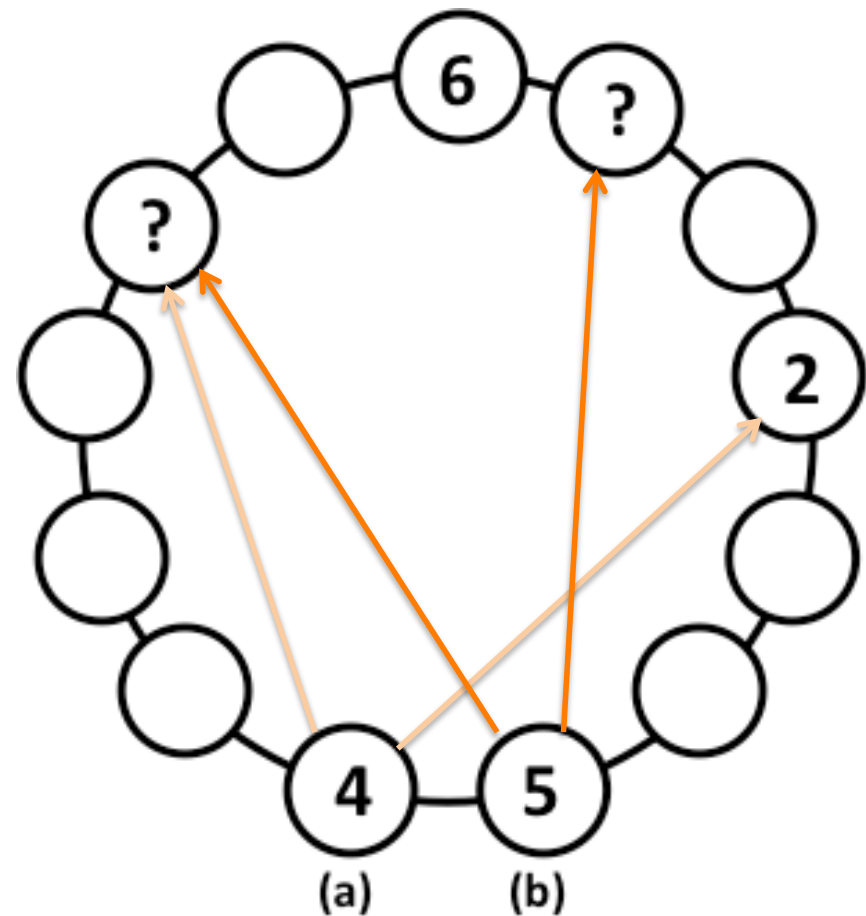
Jour 2 – Problème 4 – Les fers à cheval

- Essayons avec 27 fers à cheval
- Nous trouvons assez facilement un exemple qui convient, comme celui de la figure
- La réponse est **27** au maximum



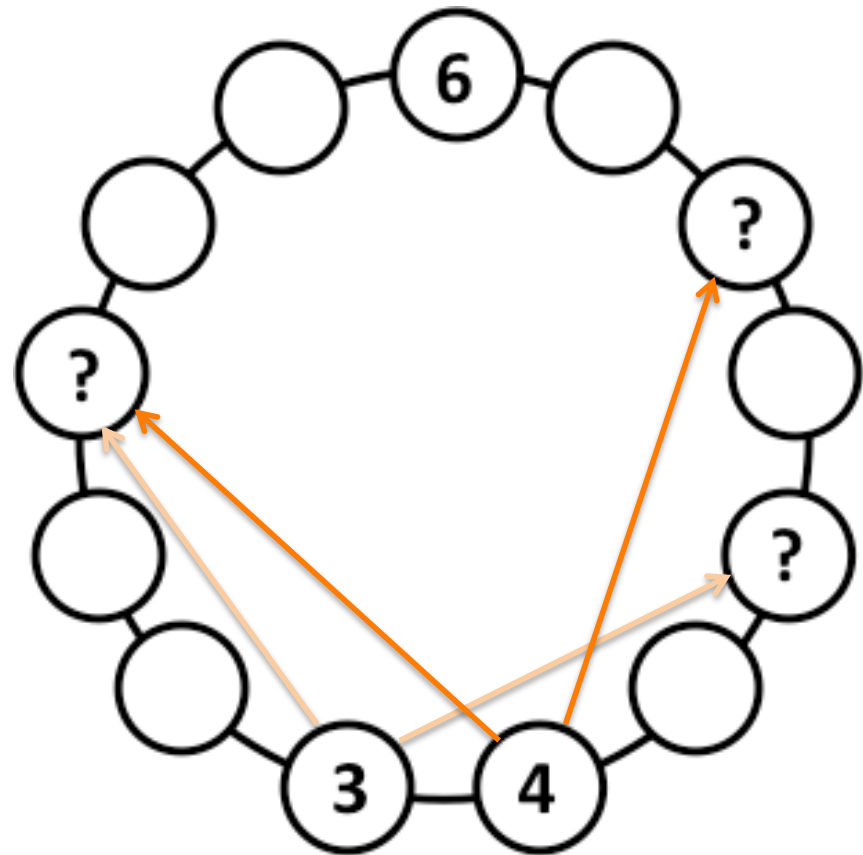
Jour 2 – Problème 5 – Le collier

- Il n'y a pas le 5 en (a)
car (b) doit être supérieur
- S'il y a le 4 en (a)
- En (b), qui doit être supérieur,
il y a le 5
- L'alternance pair impair force
le 2
- Mais le 1 ne peut pas être
dans l'un des deux « ? »



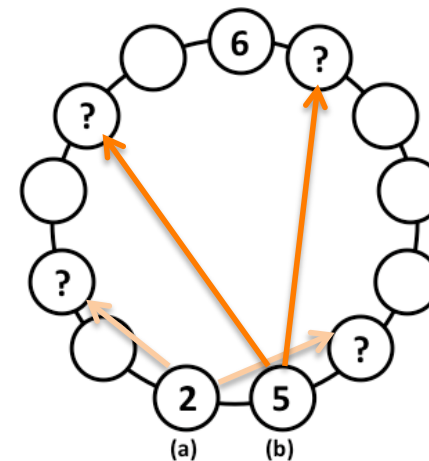
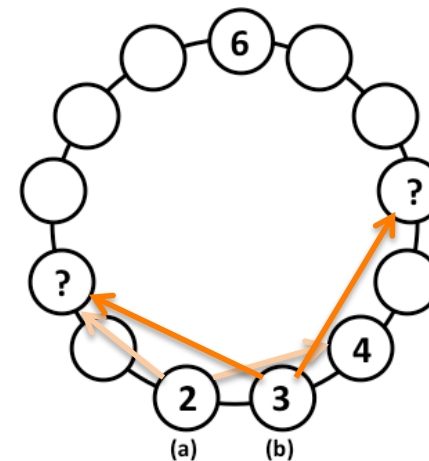
Jour 2 – Problème 5 – Le collier

- S'il y a le 3 en (a)
- En (b), qui doit être supérieur et pair, il y a le 4
- Mais l'alternance pair impair est impossible à gauche entre les 3 et 6



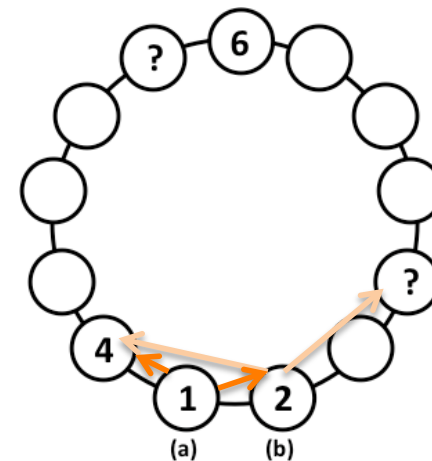
Jour 2 – Problème 5 – Le collier

- S'il y a le 2 en (a)
- Il y a le 3 ou le 5 en (b), qui doit être supérieur et impair
- S'il y a le 3, le 1 ne peut pas être dans l'un des deux ?
- S'il y a le 5, il y a un ? en trop (7 perles précieuses)



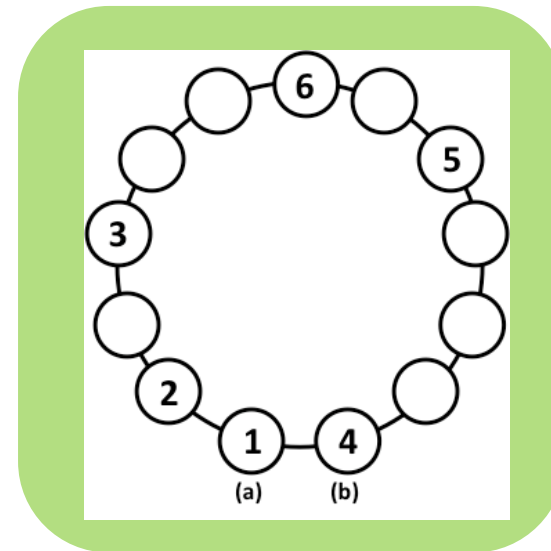
Jour 2 – Problème 5 – Le collier

- Il y a le 1 en (a)
- Il y a le 2 et le 4 à côté du 1 (alternance pair impair)
- S'il y a le 2 en (b), le 3 ne peut pas être dans l'un des deux ?



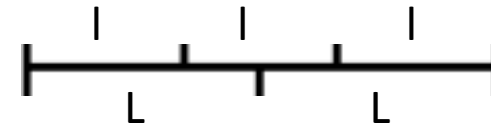
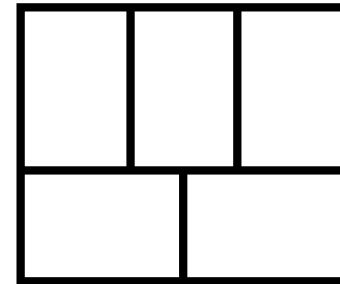
Jour 2 – Problème 5 – Le collier

- Il y a le 1 en (a), le 4 en (b) et le 2 de l'autre côté du (a) par rapport au 4
- Les 3 et 5 sont forcément placés
- C'est l'unique réponse



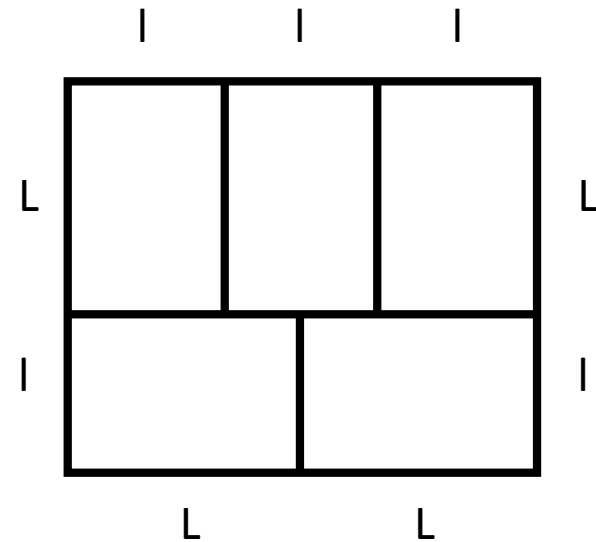
Jour 2 – Problème 6 – Le rectangle de l'année

- En considérant le trait horizontal au milieu, il y a au dessus 3 fois la largeur l d'un petit rectangle et au dessous 2 fois sa longueur L
- $2L = 3l$



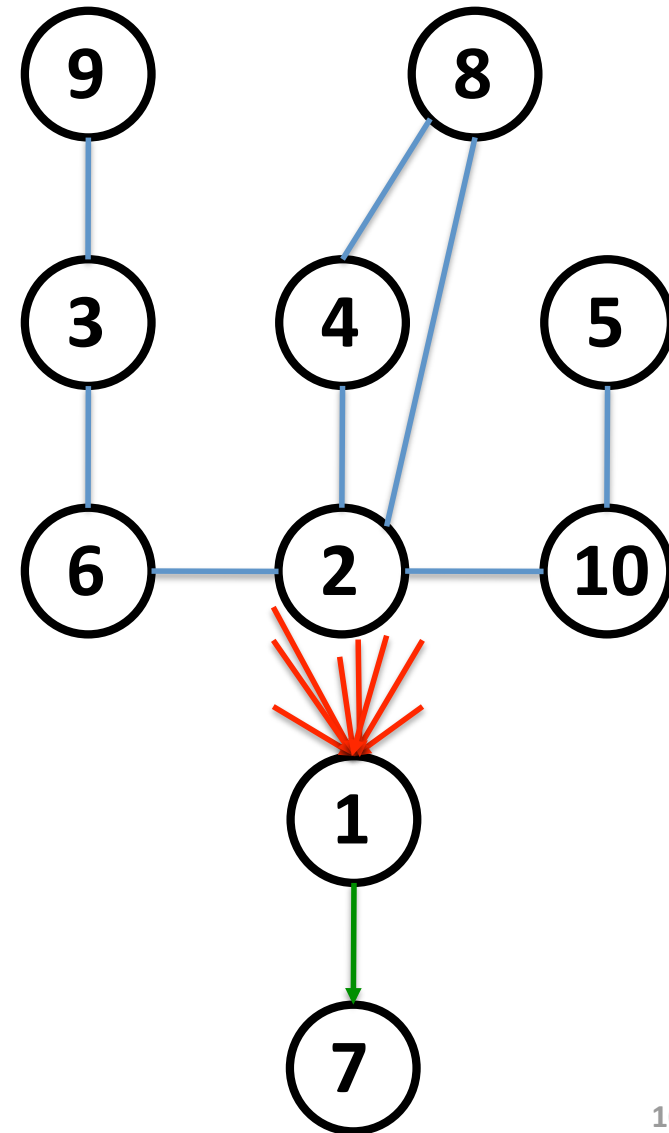
Jour 2 – Problème 6 – Le rectangle de l'année

- Le périmètre du grand rectangle est:
 $5l + 4L = 5l + 6l = 11l$
- $2013 = 11 \times 183$
- $l = 183$
- Le périmètre d'un petit rectangle est:
 $2l + 2L = 2l + 3l = 5l = 5 \times 183 = \mathbf{915}$
millimètres
- C'est l'unique réponse



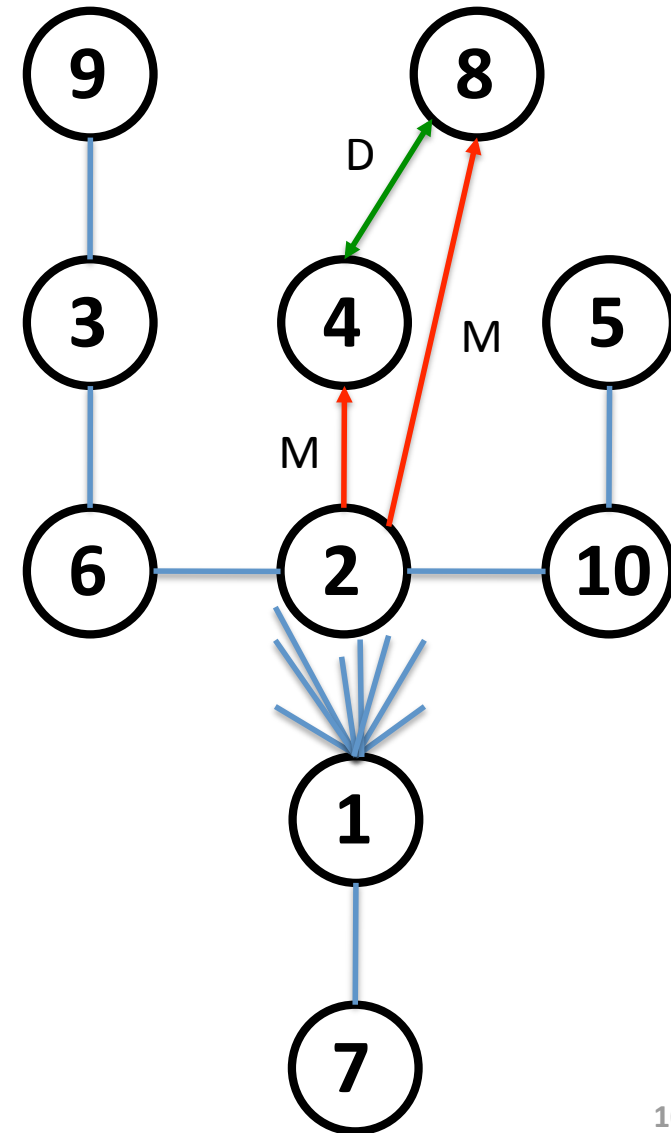
Jour 2 – Problème 7 – Diviseur ou multiple

- Les traits représentent tous les coups possibles
- Un joueur peut jouer le **1** à n'importe quel moment, mais alors il perd car l'autre joueur joue le 7 (qui n'a pas pu être joué avant)



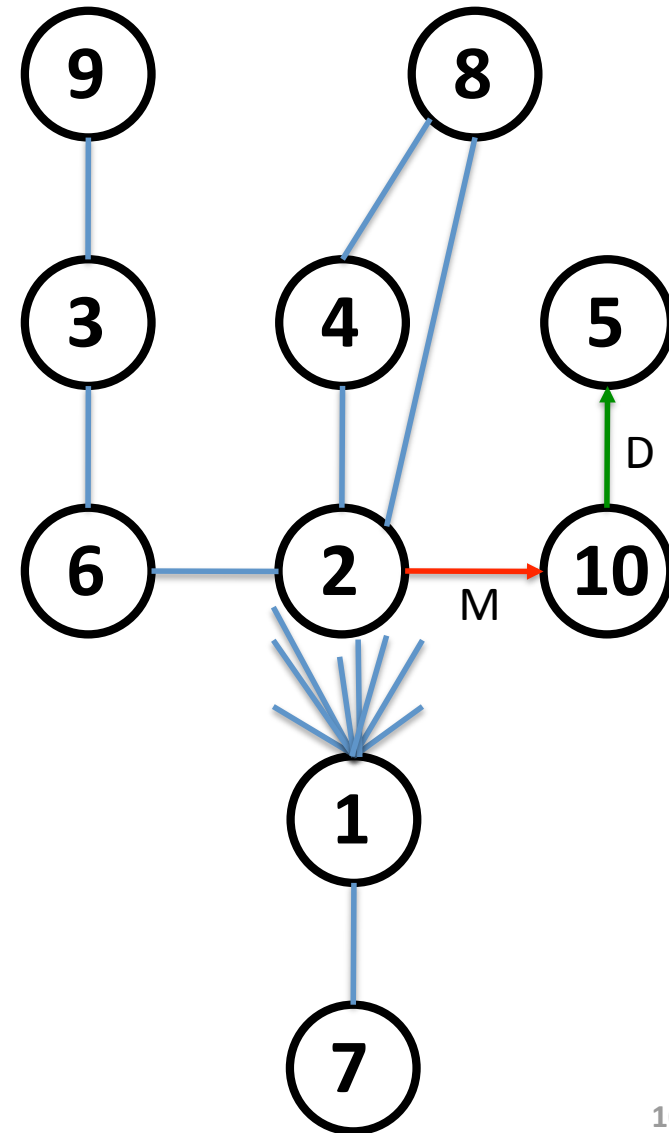
Jour 2 – Problème 7 – Diviseur ou multiple

- Si Muriel joue **le 4 ou le 8**, alors elle perd car Didier joue respectivement le 8 ou le 4, puis elle est obligée de jouer le 1



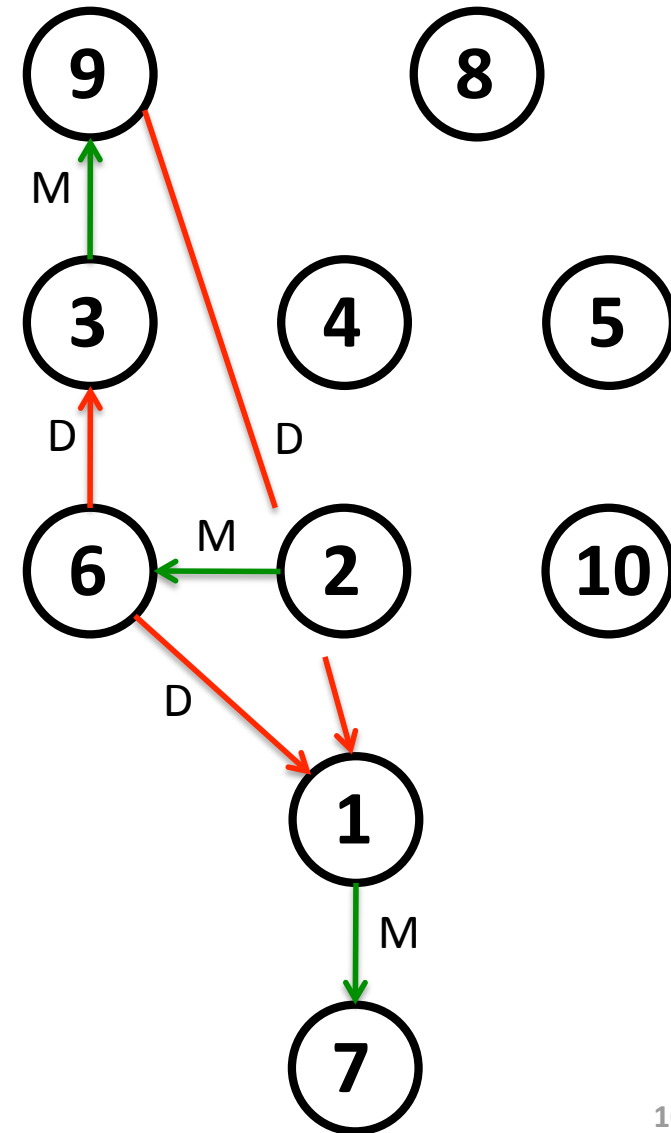
Jour 2 – Problème 7 – Diviseur ou multiple

- Si Muriel joue **le 10**, alors elle perd car Didier joue le 5, puis elle est obligée de jouer le 1



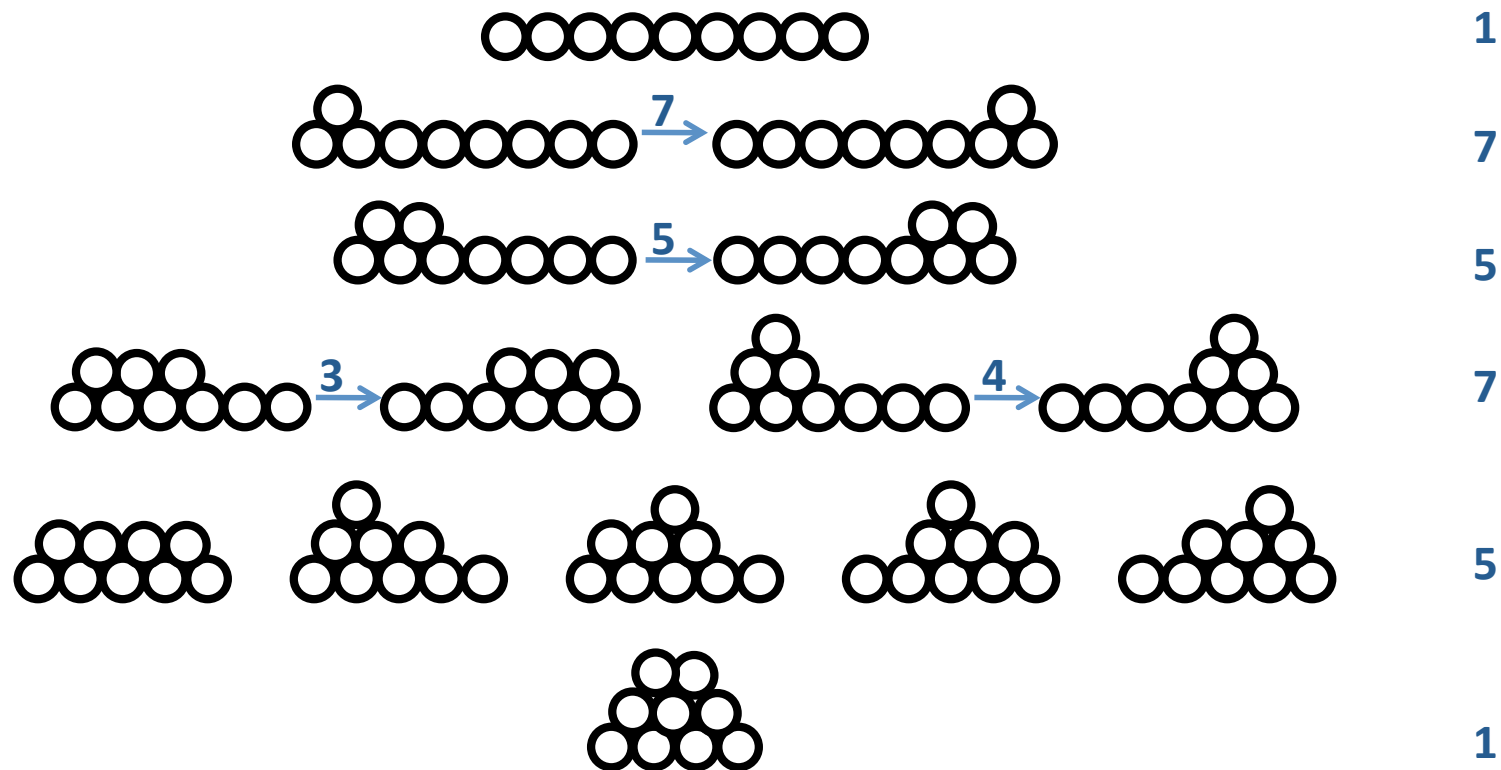
Jour 2 – Problème 7 – Diviseur ou multiple

- Muriel joue le **6**
- Si Didier joue le **1**, alors elle joue le 7
- Si Didier joue le **3**, alors elle joue le 9, Didier joue le 1, elle joue le 7
- L'unique réponse est **6**



Jour 2 – Problème 8 – Les tas de billes

- Dénombrons **en fonction du nombre de billes sur la ligne inférieure** (de 9 à 4)



- La réponse est $1+7+5+7+5+1 = 26$

Jour 2 – Problème 9 – Devine nombre

Nombre de 3 chiffres se terminant par	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Divisible par			3	4	5	6	7	8	9

- CDE est divisible par 5, **E = 5**
- DEF est divisible par 6, F est pair
- **EFG**, divisible par 7, est potentiellement 525, 546, 567, 581 ou 588
- 525 et 588 entraînent un doublon de respectivement 5 et 8
- 546 entraîne 46H divisible par 8, H = 4 et un doublon de 4

Jour 2 – Problème 9 – Devine nombre

- Si EFG = 581

Nombre de 3 chiffres se terminant par	A	B	C	D	5	8	1	H	I
Divisible par			3	4	5	6	7	8	9

- $FGH = 81H$ est divisible par 8, $H = 6$
- $GHI = 16I$ est divisible par 9, $I = 2$
- $DEF = D58$ est divisible par 6
- $D = 2, 5$ ou 8 entraîne un doublon de chiffre

Jour 2 – Problème 9 – Devine nombre

- EFG = **567**

Nombre de 3 chiffres se terminant par	A	B	C	D	5	6	7	H	I
Divisible par			3	4	5	6	7	8	9

- FGH = 67H est divisible par 8, **H = 2**
- GHI = 72I est divisible par 9, **I = 9**

Jour 2 – Problème 9 – Devine nombre

Nombre de 3 chiffres se terminant par	A	B	C	D	5	6	7	2	9
Divisible par			3	4	5	6	7	8	9

- DEF = D56 est divisible par 6, D = 1 ou 4
- BCD est divisible par 4, D est pair, **D = 4**

Jour 2 – Problème 9 – Devine nombre

Nombre de 3 chiffres se terminant par	A	B	C	4	5	6	7	2	9
Divisible par			3	4	5	6	7	8	9

- $BCD = BC4$ est divisible par 4, **C = 8**
- A est inférieur à B, **A = 1** et **B = 3**
- L'unique réponse est **138456729**

Jour 2 – Problème 10 – Les glands de l'année

- Soit S le nombre total de glands
- La solution sera $(S - 2013)$
- Soient respectivement $(2S/3 - D)$ et $(S/3 + D)$ les nombres de glands des stocks de Tic et de Tac au début du premier jour
- Suite à la première manipulation, ils deviennent respectivement $(S/3 - D/2)$ et $(2S/3 + D/2)$
- Suite à la seconde manipulation, ils deviennent respectivement $(2S/3 - D/4)$ et $(S/3 + D/4)$

Jour 2 – Problème 10 – Les glands de l'année

- Plus généralement, les deux manipulations d'un jour reviennent à diviser D par 4
- $4^6 = 64^2 = 4096$
- A la fin du sixième jour, les nombres de glands des stocks de Tic et de Tac seront respectivement $(2S/3 - D/4096)$ et $(S/3 + D/4096)$
- $D = 4096 (2S/3 - 2013) (1)$

Jour 2 – Problème 10 – Les glands de l'année

- $(S/3 + D)$ est positif (stock de Tac au début du premier jour)
- En remplaçant D par sa valeur en fonction de S donnée par **(1)**, nous arrivons à $S > (1 - 1/8193) \times 3019,5$
donc $S > (1 - 1/6039) \times 3019,5 = \mathbf{3019}$
- $(2S/3 - D)$ est positif (stock de Tic au début du premier jour)
- En remplaçant D par sa valeur en fonction de S donnée par **(1)**, nous arrivons à $S < (1 + 1/4095) \times 3019,5$
donc $S < (1 + 1/3019,5) \times 3019,5 = \mathbf{3020,5}$
- $S = \mathbf{3020}$ ($D = 4096/3$)

Jour 2 – Problème 10 – Les glands de l'année

- L'unique réponse est
 $S - 2013 = 3020 - 2013 = \mathbf{1007}$

Après manipulations	Tic	Tac
	648	2372
Jour 1	324	2696
	1672	1348
Jour 2	836	2184
	1928	1092
Jour 3	964	2056
	1992	1028
Jour 4	996	2024
	2008	1012
Jour 5	1004	2016
	2012	1008
Jour 6	1006	2014
	2013	1007

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

- Les seize nombres de quatre chiffres commencent quatre fois par chaque chiffre de 1 à 4 (quatre bords de la grille)
- Le nombre de rang 7, entre 5 et 8, commence par **2**

13

7

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

- Le nombre de rang 13 commence par **4**
- Le deuxième chiffre du nombre de rang 13 est **1** ou 3
- Il ne peut pas être 3 car les trois nombres de rangs 14, 15 et 16 sont supérieurs au nombre de rang 13 et commencent également par 4

13	4	1	
	2		
	7		

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

- Si le nombre de rang 7 est **2314**
- Les nombres de rang 5 et 6 sont 2134 et 2143
- Ils doivent être lus à partir de la droite
- Nous ne pouvons pas les lire tous les deux
- Le **nombre de rang 7** est **2413**
- Le **nombre de rang 8** est **2431**
- Il peut être lu à partir de la droite, de la gauche ou du haut

		4	
13	4	1	
		3	
		2	

7

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

- Si le nombre de rang 8, 2431, est lu à partir de la droite
- Nous plaçons le **2** forcé dans la colonne à gauche
- Il y a trois nombres commençant par **24**, ce qui est impossible

	1	3	4	2
13	4	1		
	2	4		
		2		
		7		

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

- Si le nombre de rang 8, 2431, est lu à partir de la gauche
- Nous plaçons le 3 forcé dans la colonne à gauche puis les 1 et 4 dans la ligne en bas
- Il y a trois nombres commençant par 41, ce qui est impossible

		3	
13	4	1	
	2	4	3
	3	2	1
			4

7

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

- Le nombre de rang 8, 2431, est lu à partir du haut
- Si la ligne du haut est **2314**
- Nous plaçons les 4 et 3 dans la ligne en bas puis le dernier 3, le dernier 1 et les deux derniers 2
- Nous doublons plusieurs nombres (1243, 2314, 3421 et 4132), ce qui est impossible

	2	3	1	4
13	4	1	3	2
	3	4	2	1
	1	2	4	3
	7			

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

- Le nombre de rang 8, 2431, est lu à partir du haut
- La ligne en haut est 2341
- Nous plaçons le dernier 1, le dernier 4
- Nous plaçons le 3 forcé sur la ligne en bas puis le 2 dans la même colonne
- Nous plaçons les 3 et 2 forcés dans la colonne à droite

	2	3	4	1
13	4	1	2	3
	3	4	1	2
	1	2	3	4
				7

Jour 2 – Problème 11 – L'ordre magique

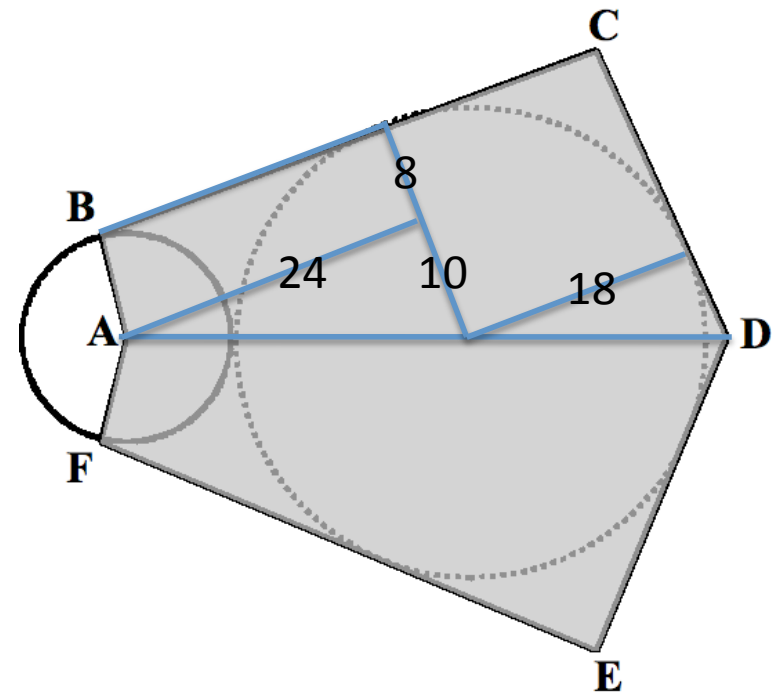
- C'est l'unique réponse
- *Nous vérifions les rangs de tous les nombres*

	2	3	4	1	
13	4	1	2	3	
	3	4	1	2	
	1	2	3	4	
					7

		8	10	14	2	
6	2	3	4	1	4	
13	4	1	2	3	11	
12	3	4	1	2	5	
1	1	2	3	4	16	
		3	7	9	15	

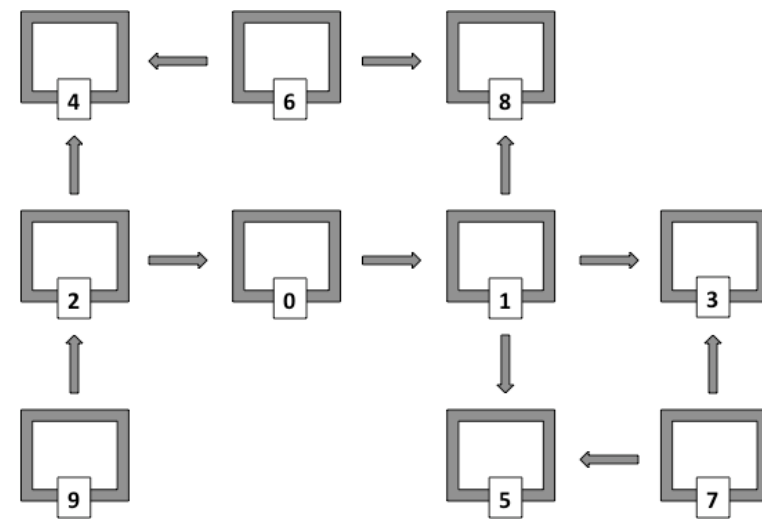
Jour 2 – Problème 12 – Le volant de badminton

- La superficie du rectangle est $24 \times 8 = 192$
- Celle du carré est $18 \times 18 = 324$
- Celle du grand triangle est $24 \times 10 / 2 = 120$
- Celle du petit triangle est $120 \times (3/4)^2 = 135/2$
- Additionnons ces quatre superficies puis doublons
- La réponse est **1407** mm²



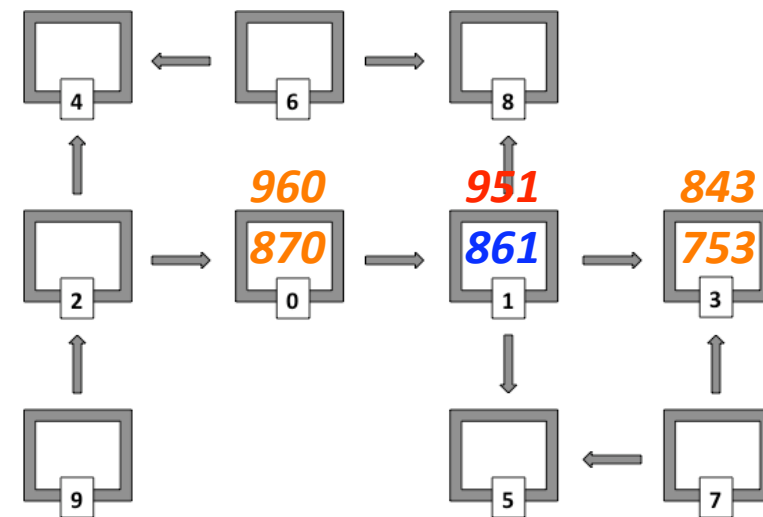
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- Il existe 10 triplets de 3 chiffres dont la somme est 15 :
960, 951, 942, 870, 861, 852, 843, 762, 753 et 654
- Chacun des 10 nombres est obtenu par permutation d'un triplet différent



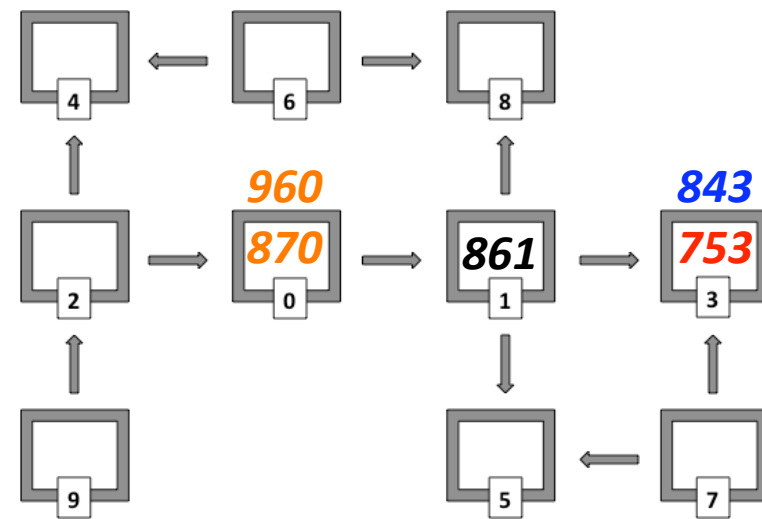
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- « 3 » (étiquette en bas) contient le triplet **843** ou **753**
- « 1 » contient le triplet **951** ou **861**
- « 0 » contient le triplet **960** ou **870**
- Le nombre dans « 1 », inférieur au nombre dans « 3 », ne commence pas par 9
- Si « 1 » contient le triplet **951**, le nombre dans « 1 » est au plus égal à 591 et n'est pas supérieur au nombre dans « 0 » au moins égal à 609
- « 1 » contient le triplet **861**



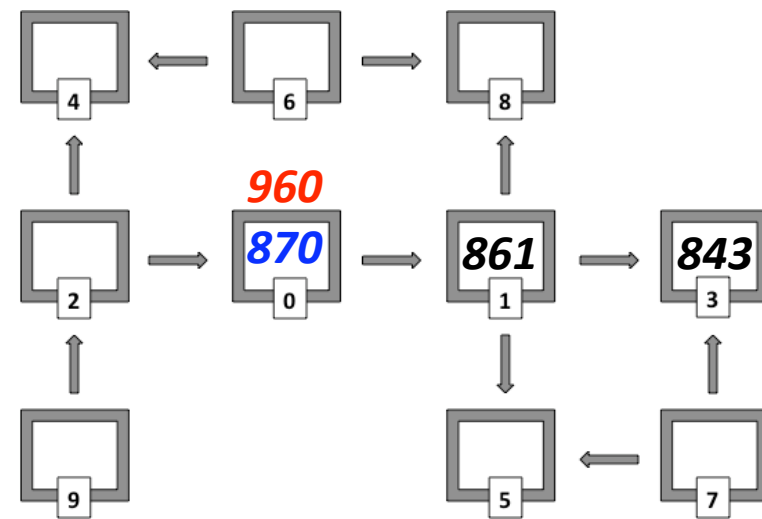
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- Le nombre dans « 3 » a un chiffre commun avec le nombre dans « 1 »
- « 3 » contient le triplet **843**



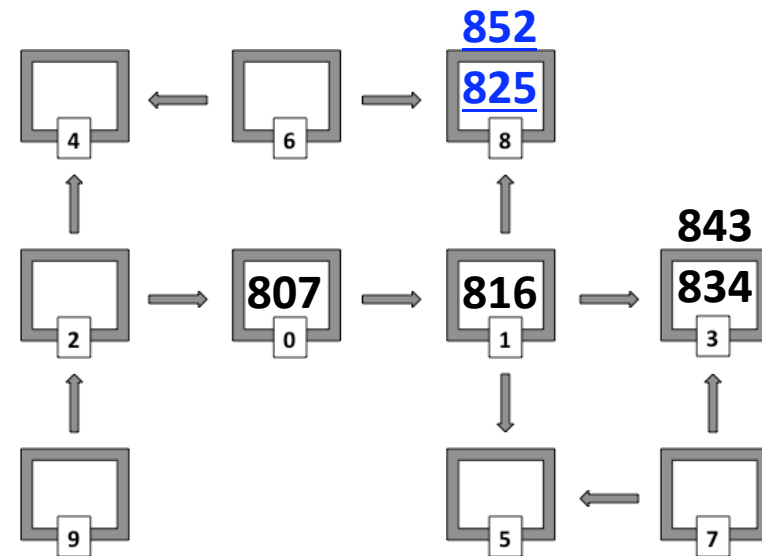
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- Si « 0 » contient le triplet **960**
- Le nombre dans « 0 », inférieur au nombre dans « 1 », ne commence pas par 9
- Si le nombre dans « 0 » est 609, le nombre dans « 1 » est soit 618 et n'est pas inférieur à 348 ou 438 dans « 3 », soit 681 et n'est pas inférieur à 384 ou 483 dans « 3 »
- Si le nombre dans « 0 » est 690, il n'est pas inférieur à 618 ou 681 dans « 1 »
- « 0 » contient le triplet **870**



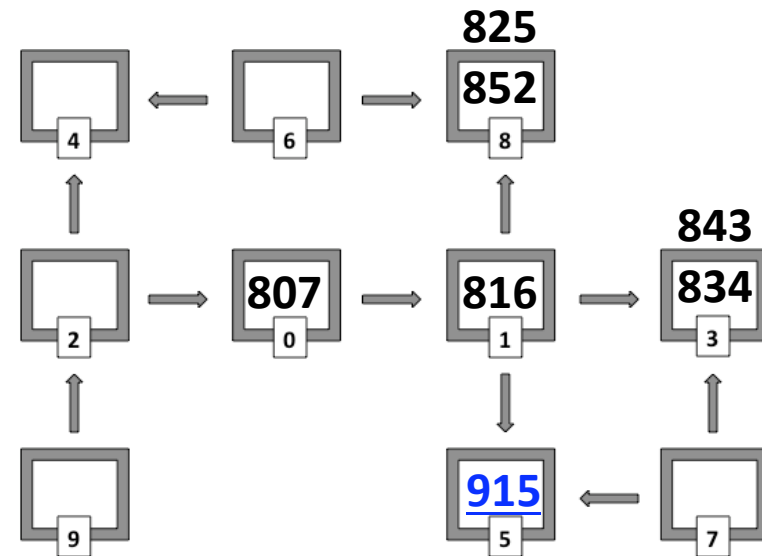
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- « 8 » contient 852, le dernier triplet avec un 8 disponible
- Le nombre dans « 8 », supérieur à 816 dans « 1 », est 825 ou 852



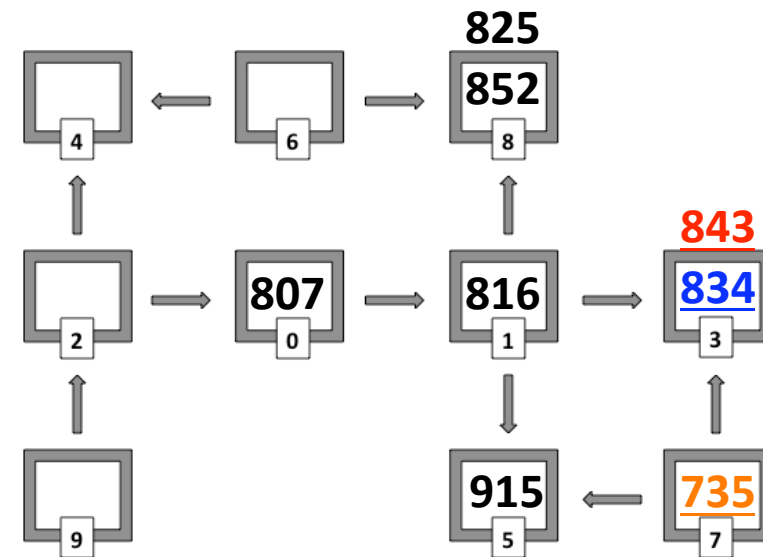
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- « 5 » contient le triplet *951* ou *753*
- Le nombre dans « 5 », supérieur à 816 dans « 1 » et ayant un chiffre commun avec lui, est **915**



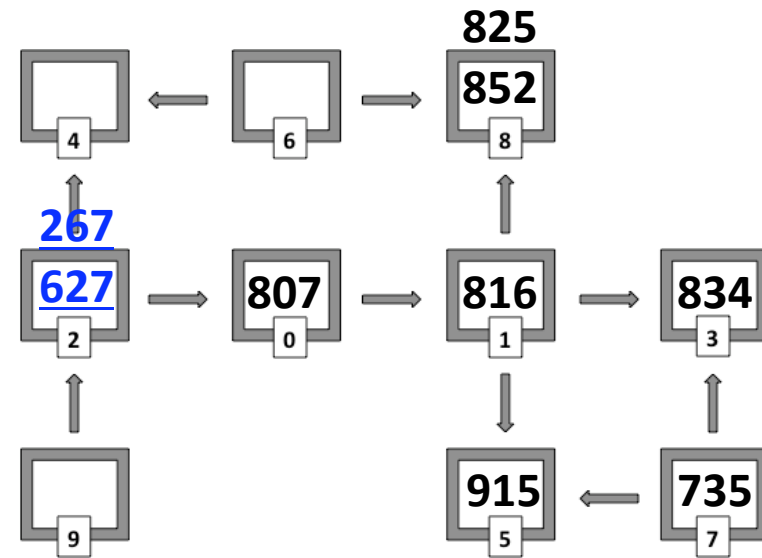
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- « 7 » contient le triplet 762 ou 753
- Le nombre dans « 7 », ayant un chiffre commun avec 915 dans « 5 », est 375 ou 735
- Le nombre dans « 7 », ayant un chiffre commun avec 834 ou 843 dans « 3 », est **735**
- Le nombre dans « 3 » est **834**



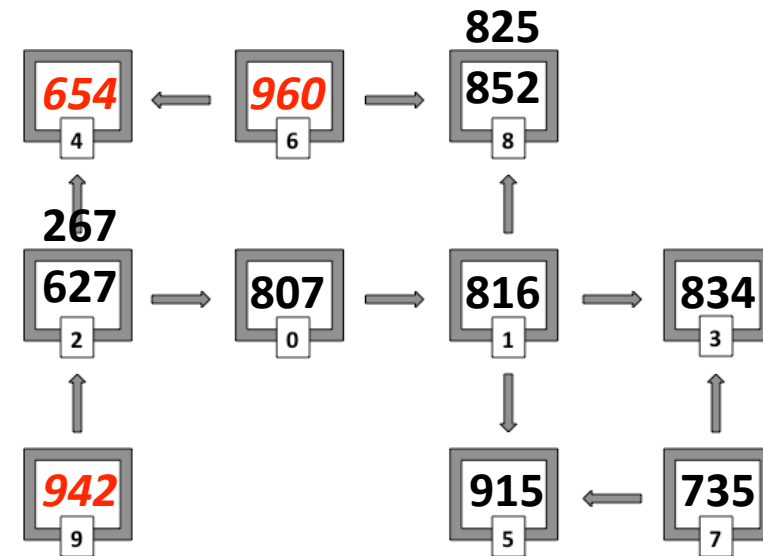
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- « 2 » contient le triplet 942 ou 762
- Le nombre dans « 2 », ayant un chiffre commun avec 807 dans « 5 », est 267 ou 627



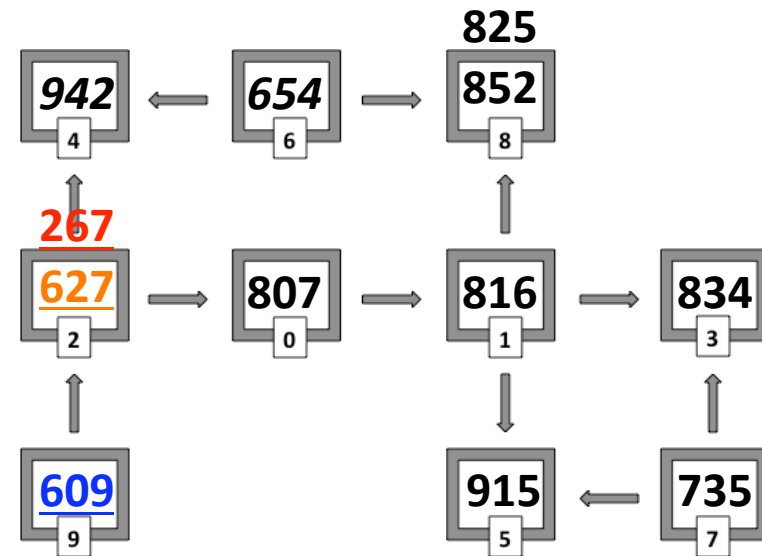
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- Si « 9 » contient le triplet **942**, « 4 » et « 6 » contiennent respectivement les triplets **654** et **960**, et le nombre dans « 6 » n'a pas de chiffre commun avec 825 ou 852 dans « 8 »
- « 9 », « 4 » et « 6 » contiennent respectivement les triplets 960, 942 et 654



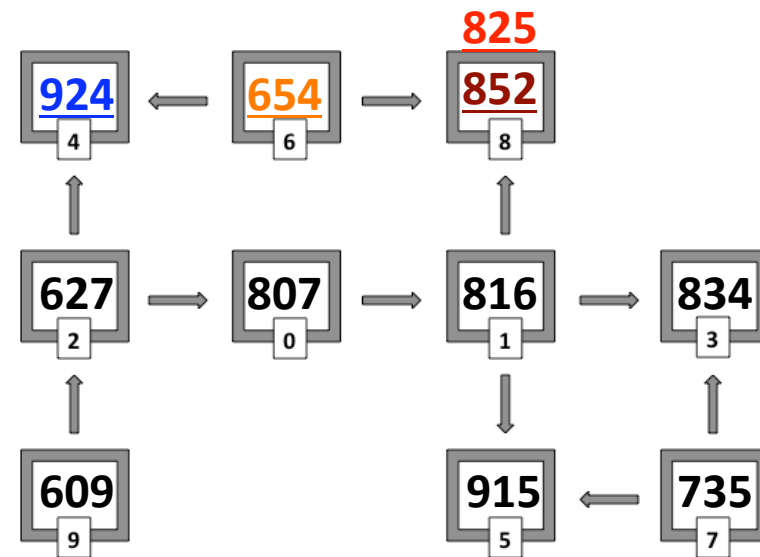
Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- Le nombre dans « 9 », inférieur à 267 ou 627 dans « 2 » et ayant un chiffre commun avec lui, est 609
- Le nombre dans « 2 » est 627



Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

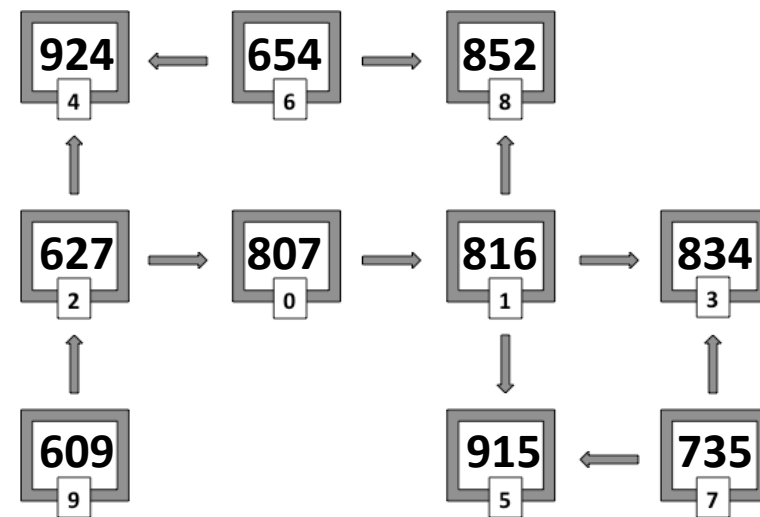
- Le nombre dans « 4 », supérieur à 627 dans « 2 » et ayant un chiffre commun avec lui, est **924**
- Le nombre dans « 6 » ne débute pas par 5, en commun avec le nombre dans « 8 », et finit par 4, en commun avec le nombre dans « 9 »
- Le nombre dans « 6 » est **654**
- Le nombre dans « 8 » est **852**



Jour 2 – Problème 13 – Suivez les flèches

- La somme des nombres est
 $807+816+627+834+924+915+654+735+852+609 = \mathbf{7773}$
- C'est l'unique réponse (*pour la somme comme pour le détail des nombres*)

N.B. $7773 = 3 \times 2591$, où 2591 est premier. En partant des triplets, aucun raccourci de raisonnement ne permettait d'arriver directement à ce résultat



Jour 2 – Problème 14 – Le champ de l'année, ou presque

- Soit c la longueur du côté du carré:
- $(c-1)(c+1)$ est divisible par $2013 = 3 \times 11 \times 61$

A/ Si 61 divise $(c-1)$, $c = 1+61x$, $(c-1)(c+1)/61 = x(2+61x)$ est divisible par 33

Aa/ Si x est divisible par 11, $x = 11y$, $(c-1)(c+1)/671 = y(2+671y)$ est divisible par 3

- Si y est divisible par 3, $y = 3z$
- $c = 1+2013z$ ne prend aucune valeur entre 1 et 1000
- Si $(2+671y)$ est divisible par 3, $y = 2+3z$
- $c = 1343+2013z$ ne prend aucune valeur entre 1 et 1000

Jour 2 – Problème 14 – Le champ de l'année, ou presque

A/ Si 61 divise (c-1), $c = 1+61x$, $(c-1)(c+1)/61 = x(2+61x)$ est divisible par 33

Ab/ Si $2+61x$ est divisible par 11, $x = 7+11y$, $(c-1)(c+1)/671 = (7+11y)(39+61y)$
est divisible par 3

- Si $7+11y$ est divisible par 3, $y = 1+3z$
- $c = 1099+2013z$ ne prend aucune valeur entre 1 et 1000
- Si $39+61y$ est divisible par 3, $y = 3z$
- $c = 428+2013z$ fournit une première solution, **428**

Jour 2 – Problème 14 – Le champ de l'année, ou presque

B/ Si 61 divise $c+1$, $c = 60+61x$, $(c-1)(c+1)/61 = (59+61x)(1+x)$ est divisible par 33

Ba/ Si $1+x$ est divisible par 11, $x = 10+11y$, $(c-1)(c+1)/671 = (669+671y)(1+y)$ est divisible par 3

- Si $669+671y$ est divisible par 3, $y = 3z$
- $c = 670 + 2013z$ fournit une deuxième solution, **670**
- Si $1+y$ est divisible par 3, $y = 2+3z$
- $c = 2012+2013z$ ne prend aucune valeur entre 1 et 1000

Jour 2 – Problème 14 – Le champ de l'année, ou presque

B/ Si 61 divise $c+1$, $c = 60+61x$, $(c-1)(c+1)/61 = (59+61x)(1+x)$ est divisible par 33

Bb/ Si $59+61x$ est divisible par 11, $x = 3+11y$, $(c-1)(c+1)/671 = (22+61y)(4+11y)$
est divisible par 3

- Si $22+61y$ est divisible par 3, $y = 2+3z$
- $c = 1585 + 2013z$ ne prend aucune valeur entre 1 et 1000
- Si $4+11y$ est divisible par 3, $y = 1+3z$
- $c = 914 + 2013z$ fournit la troisième solution, **914**

Jour 2 – Problème 14 – Le champ de l'année, ou presque

- Il y a 3 réponses: **428, 670 et 914** mètres

N.B. Observons que, sans la contrainte entre 1 et 1000, les solutions fonctionnent par binômes de somme 2013: 1 et 2012, 428 et 1585, 670 et 1343, 914 et 1099.

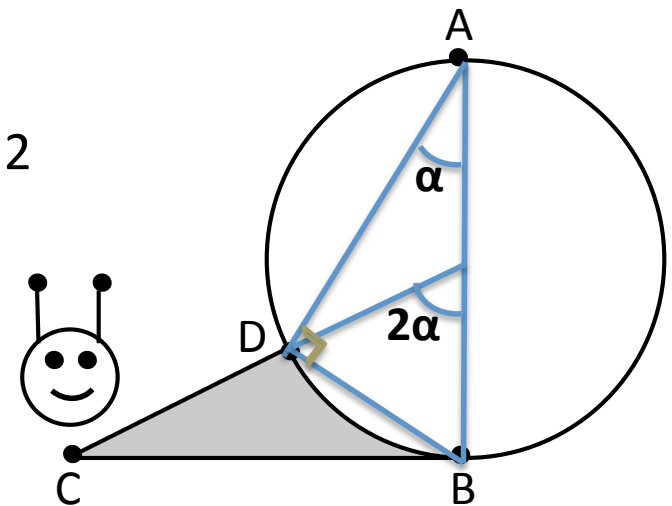
En effet, le reste de la division par 2013 de $(2013-c+1)(2013-c-1)$ est le même que celui de $(c-1)(c+1)$

Jour 2 – Problème 15 – L'escargot

- On nous demande $x = DA/DB$, c'est-à-dire l'inverse de la tangente de l'angle α
- L'angle au centre, double de α , a pour tangente 2

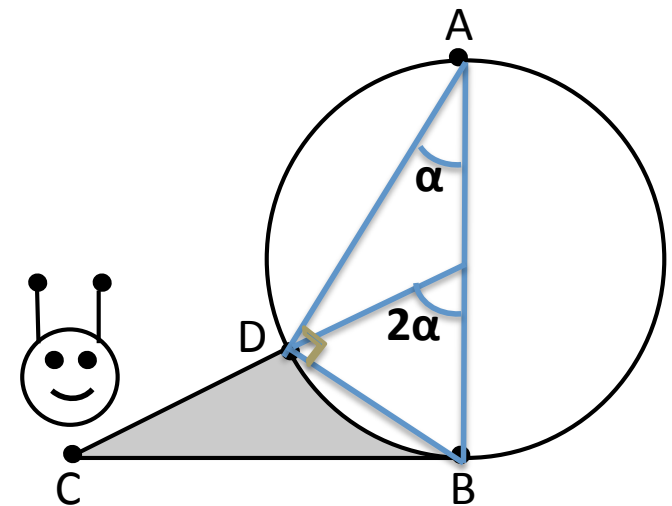
$$2 = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$2 = \frac{2/x}{1 - (1/x)^2}$$



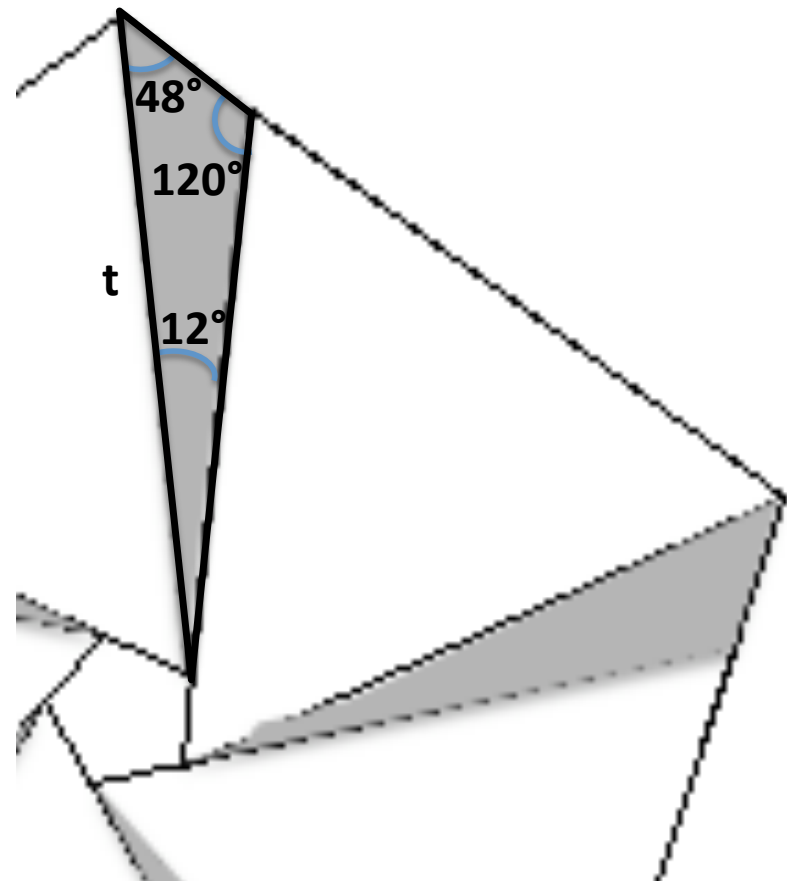
Jour 2 – Problème 15 – L'escargot

- Après transformation:
 $x^2 - x - 1 = 0$
- Ne considérons que la racine positive de l'équation (*la racine négative conduirait au symétrique de D par rapport au centre du cercle*)
- L'unique réponse est $X = (1+\sqrt{5})/2 \approx \mathbf{1,618}$
(c'est **le nombre d'or**)
($\sqrt{5} \approx 2,236$ est donné par l'énoncé)



Jour 2 – Problème 16 – La girouette

- Soit t la longueur du côté d'un triangle équilatéral
- La superficie en cm^2 d'un triangle équilatéral est
 $100 = t^2 \sqrt{3}/4$ (1)
- L'angle au sommet d'un triangle équilatéral mesure $1 \times 180/3 = 60^\circ$
- Celui d'un pentagone régulier mesure $3 \times 180/5 = 108^\circ$
- D'où les angles du triangle gris ($108 - 60 = 48$, etc.)



Jour 2 – Problème 16 – La girouette

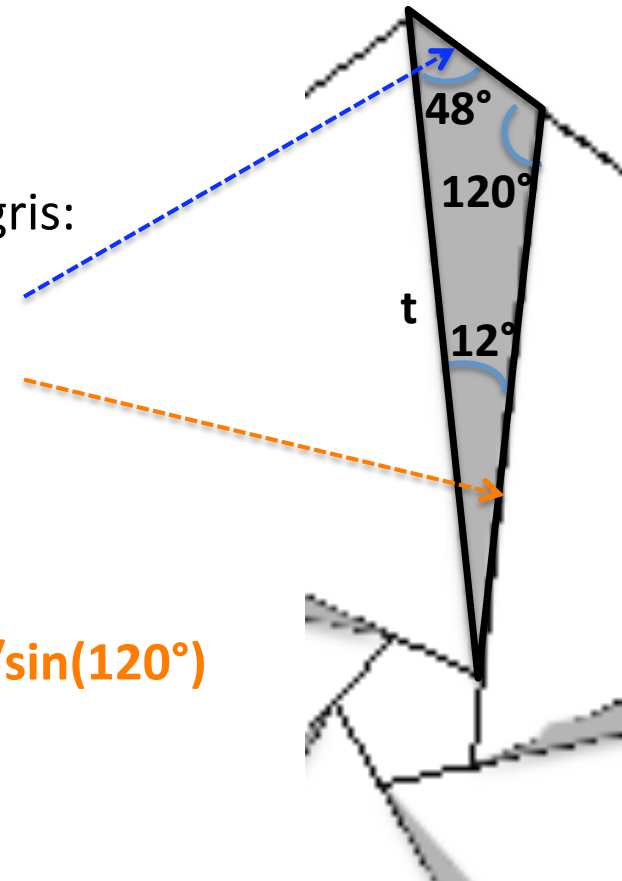
- Appliquons la loi des sinus dans le triangle gris:

$$\sin(12^\circ) t / \sin(120^\circ)$$

$$\sin(48^\circ) t / \sin(120^\circ)$$

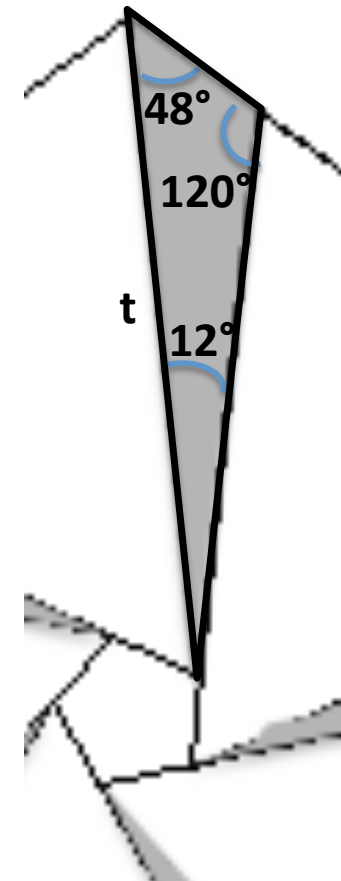
- Calculée au sommet de 120° ,
la superficie du triangle gris est:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sin(120^\circ) \sin(12^\circ) t / \sin(120^\circ) \sin(48^\circ) t / \sin(120^\circ) \\ & = \frac{1}{\sqrt{3}} t^2 \sin(12^\circ) \sin(48^\circ) \quad (2) \end{aligned}$$



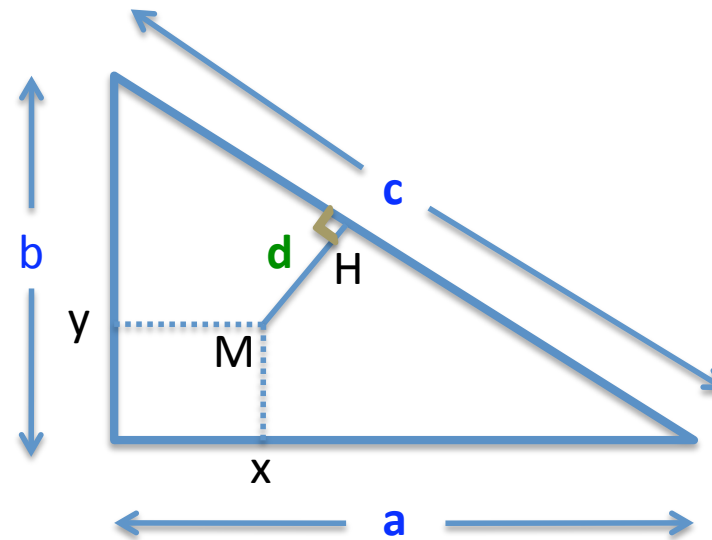
Jour 2 – Problème 16 – La girouette

- $100 = t^2 \sqrt{3}/4$ (1)
- Superficie d'un triangle gris:
 $1/\sqrt{3} t^2 \sin(12^\circ) \sin(48^\circ)$ (2)
- En éliminant t entre (1) et (2),
la superficie des 5 triangles gris est:
 $2000/3 \sin(12^\circ) \sin(48^\circ)$
- $2 \sin(12^\circ) \sin(48^\circ) = \cos(48^\circ - 12^\circ) - \cos(48^\circ + 12^\circ)$
 $= \cos(36^\circ) - \cos(60^\circ) \approx 0,809 - 0,5 = 0,309$
($\cos(36^\circ) \approx 0,809$ est donné par l'énoncé)
- La réponse est $\approx 2000/3 \times 0,309/2 = \mathbf{103} \text{ cm}^2$



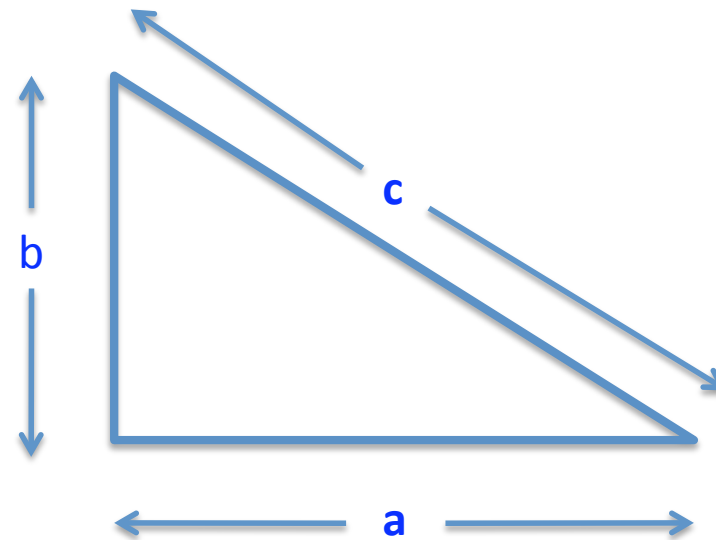
Jour 2 – Problème 17 – Le verger de Pitt Agosto

- Soit $M(x,y)$
- La droite (M,H) a pour vecteur directeur unité $(b/c, a/c)$
- $H(x+db/c, y+da/c)$
- H est sur l'hypoténuse, la droite passant par $(0,b)$ et $(a,0)$
- Il existe ξ tel que $H(\xi, b-\xi b/a)$
- Après élimination de ξ entre abscisse et ordonnée de H , en se rappelant que $a^2+b^2=c^2$,
 $d = (ab-ay-bx)/c$ (1)



Jour 2 – Problème 17 – Le verger de Pitt Agosto

- Utilisons les triplets de Pythagore
- $a = v (\lambda^2 - \mu^2)$ et $b = v 2\lambda\mu$ (ou l'inverse)
- $c = v (\lambda^2 + \mu^2)$
- λ et μ premiers entre eux, $\lambda > \mu$
- $a\lambda + b\mu = c\lambda$ et $-a\mu + b\lambda = c\mu$ (2)



Jour 2 – Problème 17 – Le verger de Pitt Agosto

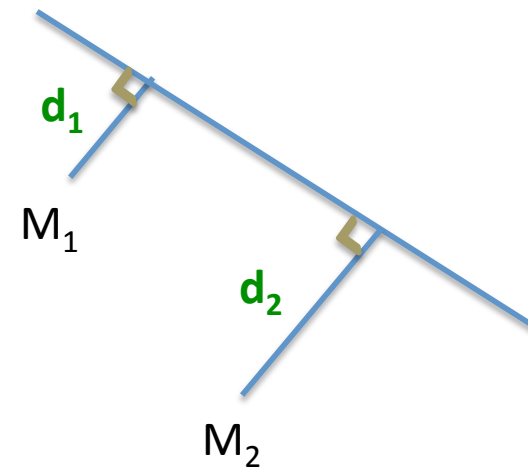
$$d_i = (ab - ay_i - b_i x) / c_i \quad (1)$$

$$a\lambda + b\mu = c\lambda \text{ et } -a\mu + b\lambda = c\mu \quad (2)$$

- Considérons deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ aux distances respectives d_1 et d_2 de l'hypoténuse

- En utilisant (1) et (2):

$$a(y_2 - y_1) + b(x_2 - x_1) = -c(d_2 - d_1) \quad (3)$$

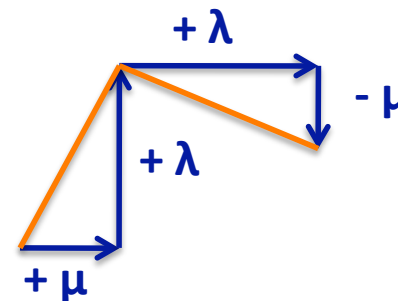


Jour 2 – Problème 17 – Le verger de Pitt Agosto

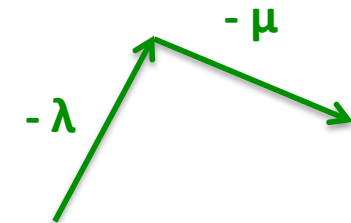
$$a(y_2 - y_1) + b(x_2 - x_1) = -c(d_2 - d_1) \quad (3)$$

- Appliquons le théorème de Bezout à l'équation linéaire **(3)** en x , y et z fonction de a , b et c
- L'ensemble des points situés à une distance entière de l'hypoténuse sont les nœuds d'un réseau dont la maille la plus fine est $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$

$x_2 - x_1$	$y_2 - y_1$	$d_2 - d_1$
$+\mu$	$+\lambda$	$-\lambda$
$+\lambda$	$-\mu$	$-\mu$



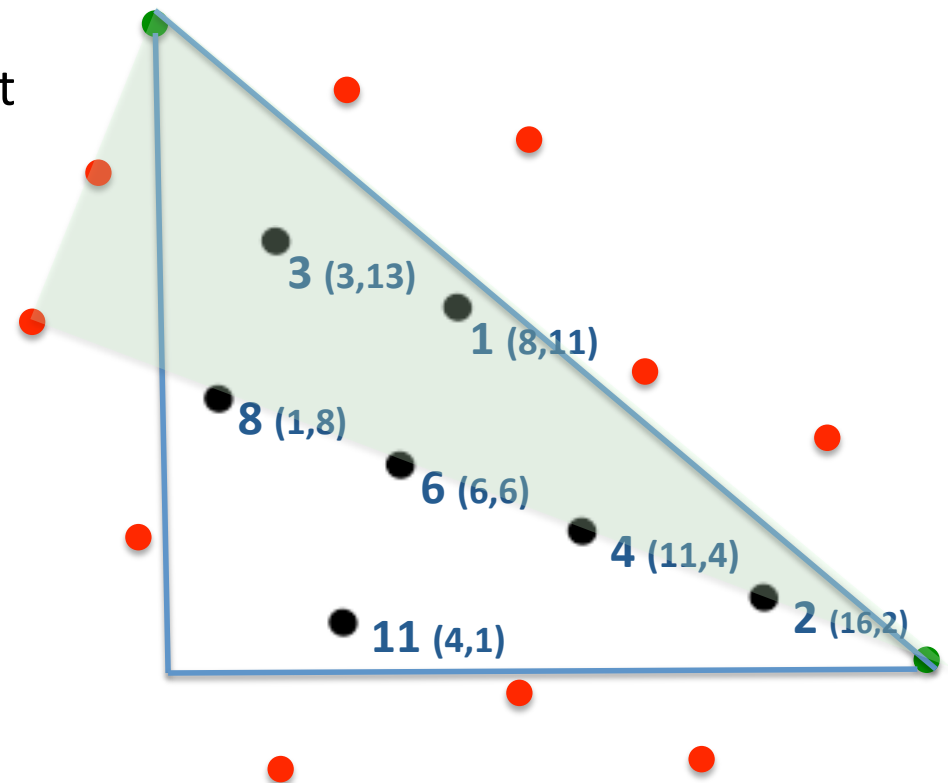
Abcisses et ordonnées



Distances de l'hypoténuse

Jour 2 – Problème 17 – Le verger de Pitt Agosto

- Les extrémités de l'hypoténuse **(21,0)** et **(0,20)** sont en vert sur la figure ($d = 0$)
- Les points **rouges** sont les nœuds du réseau extérieurs au triangle
- Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle en **vert** sur la figure
- $\sqrt{2^2+5^2} \sqrt{\lambda^2+\mu^2} = c = (\lambda^2+\mu^2)$
- $\lambda^2+\mu^2 = 29, \lambda=5, \mu=2$
- L'unique réponse est $ab/2 = (\lambda^2-\mu^2)\lambda\mu = \mathbf{210} \text{ m}^2$



Les nombres indiquent les distances à l'hypoténuse et, entre parenthèses, les coordonnées des points.

Jour 2 – Problème 18 – Le cadeau de l'année

- Soient respectivement A et B les ensembles de chiffres des deux nombres de trois chiffres, C celui du nombre de quatre chiffres
- Organisons en étapes successives la composition d'une séquence favorable (à C) dont l'ordre d'épuisement est **C,B,A**
- L'un des trois éléments de A est tiré à la fin tout à droite, et les deux autres avant lui; par exemple:

Ordre de tirage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chiffres			A			A				A

- L'un des trois éléments de B est tiré à la fin tout à droite des cases vides, et les deux autres avant lui; par exemple:

Ordre de tirage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chiffres		B	A			A	B		B	A

Jour 2 – Problème 18 – Le cadeau de l'année

Lemme

- Rangeons au hasard K objets discernables dans N emplacements possibles
- La probabilité que l'un quelconque d'entre eux occupe une place donnée est K/N
- On le démontre en remarquant que les événements « le $P^{\text{ième}}$ objet occupe une case donnée » sont incompatibles entre eux
- Une case donnée est occupée par l'un des K objets si, et seulement si, elle est occupée par le premier, ou bien le deuxième, etc.
- $1/N + 1/N + \dots + 1/N = K/N$

Jour 2 – Problème 18 – Le cadeau de l'année

- La probabilité pour que l'ordre d'épuisement soit **C,B,A** est ainsi $\frac{3}{10} \times \frac{3}{(10-3)} \times \frac{4}{(10-3-3)} = \frac{3}{10} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{4} = \frac{9}{70}$
- De même pour **C,A,B**
- Les éléments de C sont épuisés en premier si, et seulement si, l'ordre d'épuisement est C,B,A ou C,A,B
- La probabilité que le cadeau dont le prix est 2013 soit tiré en premier est $2 \times \frac{9}{70} = \frac{9}{35}$
- La probabilité que l'un des deux autres le soit est $(1 - \frac{9}{35})/2 = \frac{13}{35}$
- Le problème revient à chercher un entier E tel que **$E + 2013 \times \frac{9}{35} = (XYZ + TUV) \times \frac{13}{35} \quad (1)$**
où XYZ et TUV sont deux nombres de trois chiffres constitués avec tous les chiffres de 4 à 9

Jour 2 – Problème 18 – Le cadeau de l'année

- $E + 2013 \times 9/35 = (XYZ + TUV) \times 13/35$ (1)
soit $35(E-15) = 13(XYZ + TUV - 1434)$
- $E = 2 + 13\lambda$
- $35(\lambda - 1) = XYZ + TUV - 1434$
- Le reste de la division par 9 de $XYZ + TUV$ est le même que celui de $4+5+6+7+8+9 = 39$, soit 3
- $\lambda = 1 + 9\mu$, $E = 15 + 117\mu$
- $XYZ + TUV = 1434 + 315\mu$ (2)

Jour 2 – Problème 18 – Le cadeau de l'année

- $E = 15 + 117\mu$
- $XYZ + TUV = 1434 + 315\mu \quad (2)$
- $XYZ + TUV \leq (9+8) \times 100 + (7+6) \times 10 + (5+4) \times 1 = 1839 < 2064$
- $\mu < 2$
- Si $\mu=0$, $E = 15$ donne une première solution, avec par exemple $645+789 = 1434$
- Si $\mu=1$, $E = 132$ donne la seconde solution, avec par exemple $764+985 = 1749$
- Il y a 2 réponses: **15** et **132**