

30^e Championnat International
des Jeux Mathématiques et Logiques



Finale Internationale des 25 et 26 août 2016

Diapo**RAMA** des solutions

Jour 1 – Problème 1 – Les bonbons

- Les quatre enfants donnent des réponses toutes différentes
- Au moins trois mentent
- Si les quatre enfants mentent
- Daniel ne ment pas, contradiction
- Réponse : **3** enfants
- *Seule Carole ne ment pas et n'a pas joué*



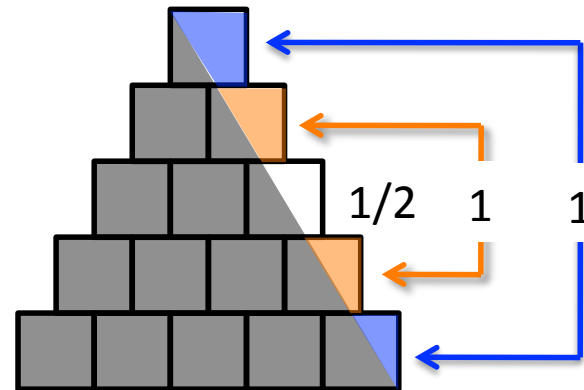
Jour 1 – Problème 2 – Les droïdes

- J1-M1 ne voit pas « 1 et 5 » ni « 3 et 3 » antennes, il en voit « 2 et 4 »
- **Si** J2-M2 a 2 antennes (J3-M3 en a 4), il en voit $5 - 4 = 1$ sur J1-M1
- J2-M2 a 4 antennes (J3-M3 en a 2), il en voit $5 - 2 = 3$ sur J1-M1
- J3-M3 en voit $3 + 4 = 7$ au total
- Réponse : **7** antennes



Jour 1 – Problème 3 – L'ombre et la lumière

- On groupe les parties éclairées complémentaires par symétrie
- $4 / 2 = 2$
- $4 + 4 + 2 = 10$
- Réponse : **10** cm²



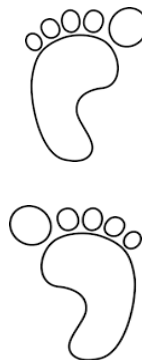
Jour 1 – Problème 4 – La paire de chaussures

- Le cas le plus défavorable est celui où Crépin prend d'abord le maximum de chaussures avec un pied d'une couleur et l'autre pied de l'autre couleur

- $7 + 5 = 12$
plus grand que $5 = 3 + 2$

- $12 + 1 = 13$

- Réponse : **13** chaussures

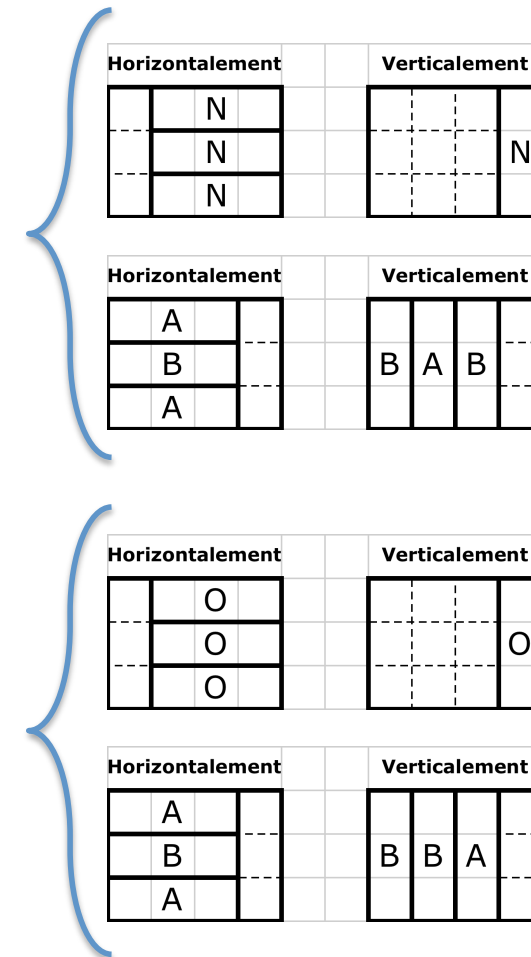
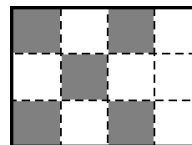


	Chaussures noires	Chaussures marron
Pied gauche	3	5
Pied droit	7	2

Jour 1 – Problème 5 – Trois cases

- O (Oui) signifie « mouvement »,
et N (Non) « pas de mouvement »
- La colonne à droite conduit à deux cas
- Puis on raisonne à partir de la gauche
- A est O et B est N, ou bien l'inverse
- On compte 3 mouvements A ou B
- Au total, on compte 3 mouvements
en haut (Tracy), et 7 en bas (Tony)

- Réponse : **7** mouvements

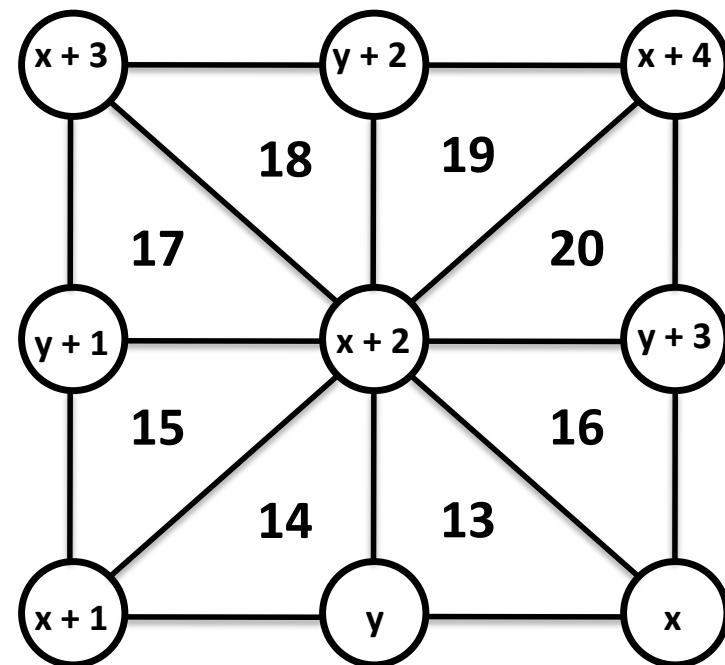


Jour 1 – Problème 6 – Devine produit

- 20×7 plus grand que $16 \times 7 = 112$, plus grand que 99
- Denis et Julien n'ont pas le 7
- $20 \times 3 \times 3$ plus grand que $16 \times 3 \times 3 = 144$, plus grand que 99
- Denis et Julien n'ont pas au moins deux facteurs 3 sur quatre (dans 3, 6 et 9)
- Le produit calculé par Laurent est un nombre de deux chiffres divisible par au moins $7 \times 3 \times 3 = 63$, c'est 63 (il a reçu 1, 7 et 9)
- Réponse : **63**
- *Denis et Julien ont reçu (2,5,6) et (3,4,8), ou (3,4,5) et (2,6,8). Les produits qu'ils ont calculés sont 60 et 96 dans les deux cas.*

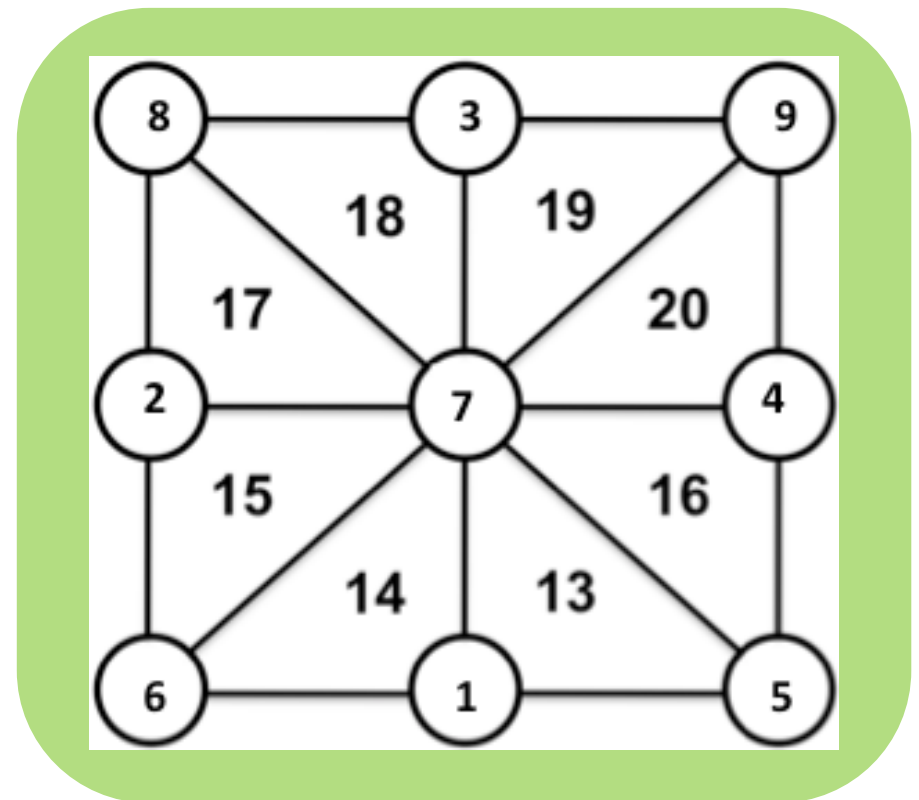
Jour 1 – Problème 7 – Les triangles

- Aux milieux de côté, il y a tous les nombres de y à $y + 3$
- Aux coins, il y a tous ceux de x à $x + 4$ sauf $x + 2$
- $x + 2$ est au centre
- $x + (x + 2) + y = 13$,
soit $2x + y = 11$
- y est impair
- Les nombres de y à $y + 3$
ne vont pas de 6 à 9,
ils vont de 1 à 4
(ceux de x à $x + 4$ vont de 5 à 9)



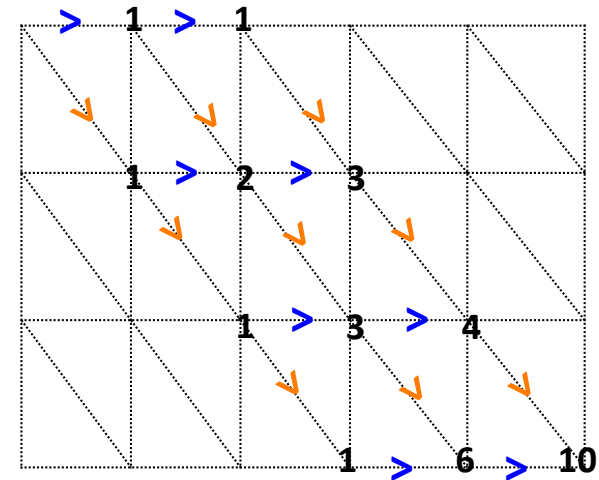
Jour 1 – Problème 7 – Les triangles

- *Autre façon de voir
(pour les plus grands)*
- La somme des nombres dans les triangles est 132
- Les nombres de 1 à 9 (somme 45) sont comptés deux fois, et celui au centre six de plus
- Le nombre au centre est $(132 - (2 \times 45)) / 6 = 7$
- On place le 9, etc.
- *La configuration est unique*



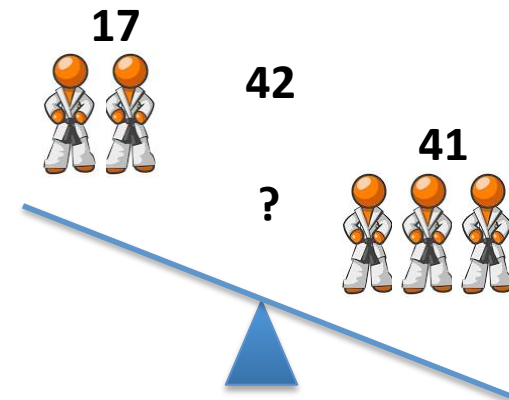
Jour 1 – Problème 8 – La carte marine

- Le chemin ne va jamais de droite à gauche (il reviendrait à la verticale plus loin) ni de bas en haut (il reviendrait à l'horizontale plus loin)
 - Le chemin ne passe jamais au dessous de la diagonale à gauche et, s'il la quitte, n'y revient plus
 - Le chemin ne passe jamais au dessus de la diagonale à droite et, s'il l'atteint, ne la quitte plus
-
- Réponse : **10** façons



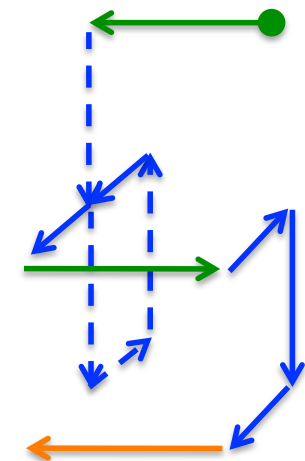
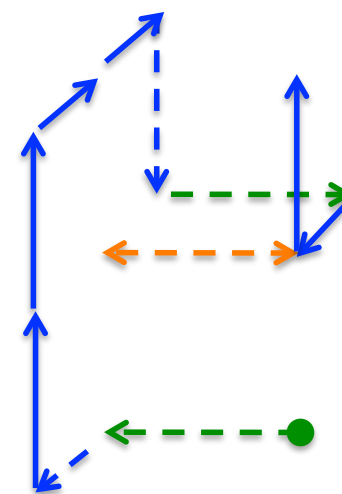
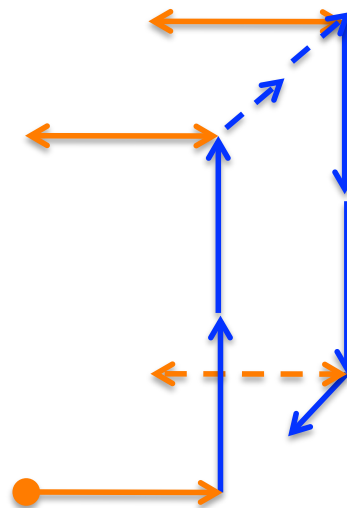
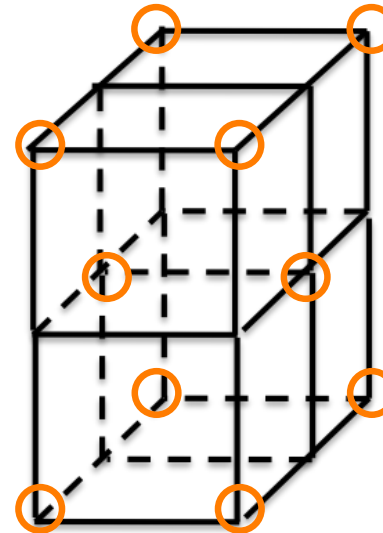
Jour 1 – Problème 9 – Les judokas

- En dehors des plus légers et des plus lourds, les judokas pèsent $100 - 17 - 41 = 42$ % du total
- Chacun d'eux pèse au moins $17 / 2$ du total
- Ils sont au plus quatre car $5 \times 17 / 2 = 42,5$ plus grand que 42
- Chacun d'eux pèse au plus $41 / 3$ du total
- Ils sont au moins quatre car $3 \times 41 / 3 = 41$ plus petit que 42
- Ils sont quatre, $2 + 4 + 3 = 9$
- Réponse : **9** judokas



Jour 1 – Problème 10 – La fourmi

- Un nombre impair (3 ou 5) d'arêtes part de 10 sommets
- Au moins $10 / 2 = 5$ arêtes seront parcourues deux fois
- Au minimum, la fourmi parcourra $33 + 5 = 38$ arêtes
- *C'est possible*
- Réponse : **38** dm



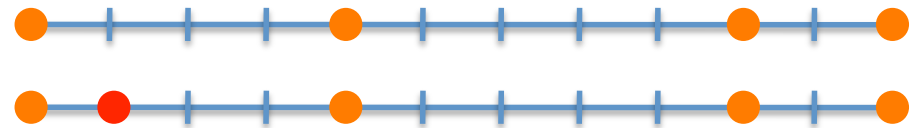
Jour 1 – Problème 11 – La ligne de métro

- Les cinq stations donnent
 $3 + 2 + 1 = 10$ distances différentes
- La longueur de la ligne de métro est la
seule distance au moins égale à 10 km
- 9 doit être décomposé en trois
- Sans tenir compte de l'ordre,
il l'est en [234], [135] ou [126]
- **Si** c'est [234], il manque 1
- La longueur de la ligne est $9 + 1 = 10$
- Coller 2, 3 ou 4 à 1 double 3, 4 ou 5

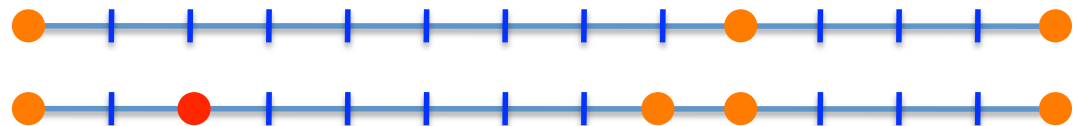


Jour 1 – Problème 11 – La ligne de métro

- Si c'est [135], il manque 2, la longueur de la ligne est $9 + 2 = 11$
- 5 doit être collée à 2 (7)
- **Si** 3 est collée à 5,
6 ne peut pas être obtenue
- 1 est collée à 5



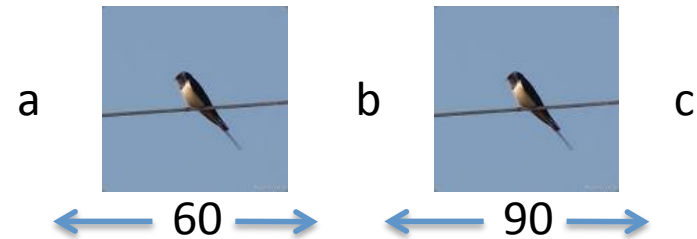
- Si c'est [126], il manque 4, la longueur de la ligne est $9 + 4 = 13$
- 1 doit être collée à 4 (5)
- **Si** 6 est collée à 1,
3 ne peut pas être obtenue
- 2 est collée à 1



- 2 réponses : **11** et **13** km

Jour 1 – Problème 12 – Les oiseaux

- $a(b+1+c) = 60$ **(1)** et $(a+1+b)c = 90$ **(2)**
- **(2) – (1)** donne : $(c-a)(b+1) = 30$
- **(1)** peut être écrit : $a((c-a) + (b+1) + a) = 60$

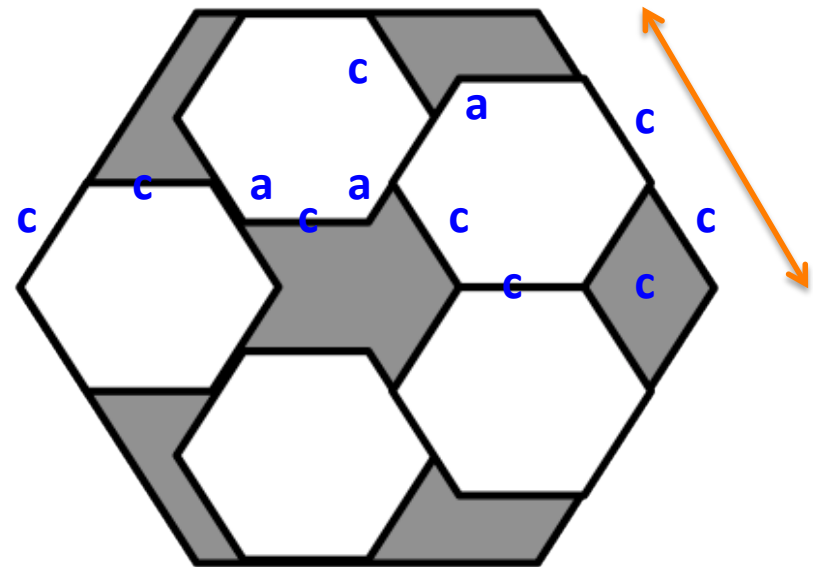


$(c-a)$	$(b+1)$	60	a	b	c	$a+1+b+1+c$
1	30	$a(31+a)$	-	29	-	-
2	15	$a(17+a)$	3	14	5	24
3	10	$a(13+a)$	-	9	-	-
5	6	$a(11+a)$	4	5	9	20

- Ensuite, l'échange de $(c-a)$ et $(b+1)$ donne les mêmes a et $(a+1+b+1+c)$
- 2 réponses : **20** et **24** oiseaux

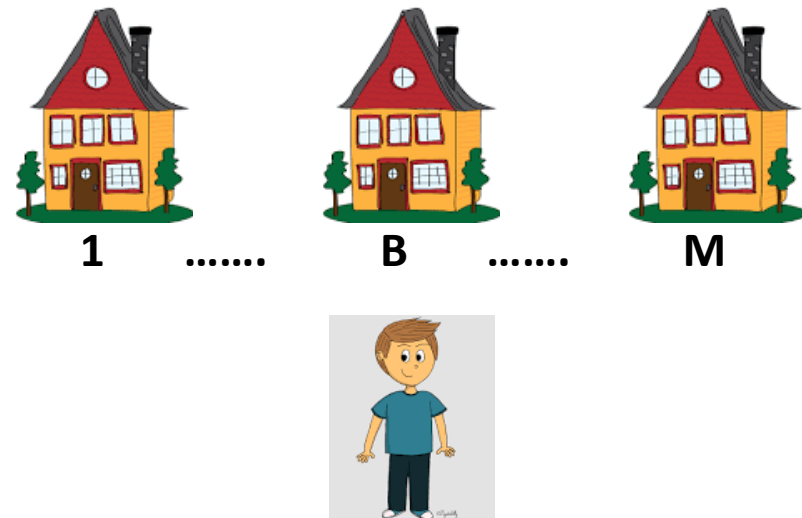
Jour 1 – Problème 13 – Le panneau routier

- Soit H le côté du grand hexagone
- Le long du trait orange : $3c - a = H$
- A l'horizontale :
 $4c + (2c + 2a)/2 = 5c + a = 2H$
- En éliminant a , $c = 3H/8$
- La superficie d'un hexagone régulier est proportionnelle au carré du côté
- $(1 - (5 \times (3/8)^2)) \times 256 = 76$
- Réponse : **76** dm²



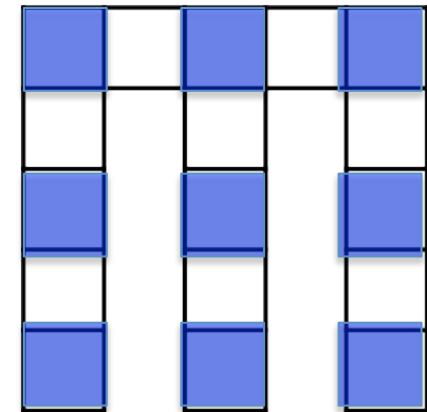
Jour 1 – Problème 14 – La rue

- Les maisons sont numérotées de 1 à M, avec $2 \leq M$
- Soient B le numéro de la maison de Benoît ($1 \leq B \leq M$), et A (entier) son âge
- $((M(M+1)/2 - B) / (M-1)) + A = 20,16$
soit $(M(M+1) - 2B) + 2A(M-1) = 40,32(M-1)$
- $M = 1 + 25k$, avec $1 \leq k$
- $B = 1 + (625k + 50A - 933)k/2$
- $k = 1$ sinon $B > M$, $B = 25A - 153$
- $1 \leq 25A - 153 \leq M = 26$
- $A = 7$ ($B = 22$)
- Réponse : **7** ans



Jour 1 – Problème 15 – Les suites arithmétiques

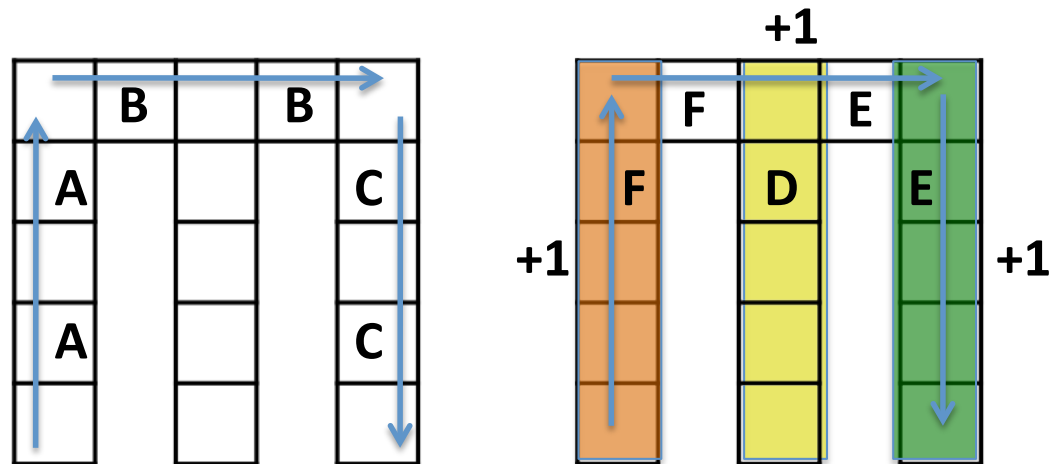
- Les 9 nombres en bleu sont de même parité car on va de l'un à l'autre par des doubles de raisons
- Si au moins une suite est de raison paire, elle ajoute 2 nombres de même parité
- Le plus grand de ces 11 nombres est au moins 22 s'ils sont pairs, et **au moins 21** s'ils sont impairs



- Une suite de raison 5 contient **au moins 21**
- Par symétrie, on suppose que la suite en haut augmente de gauche à droite

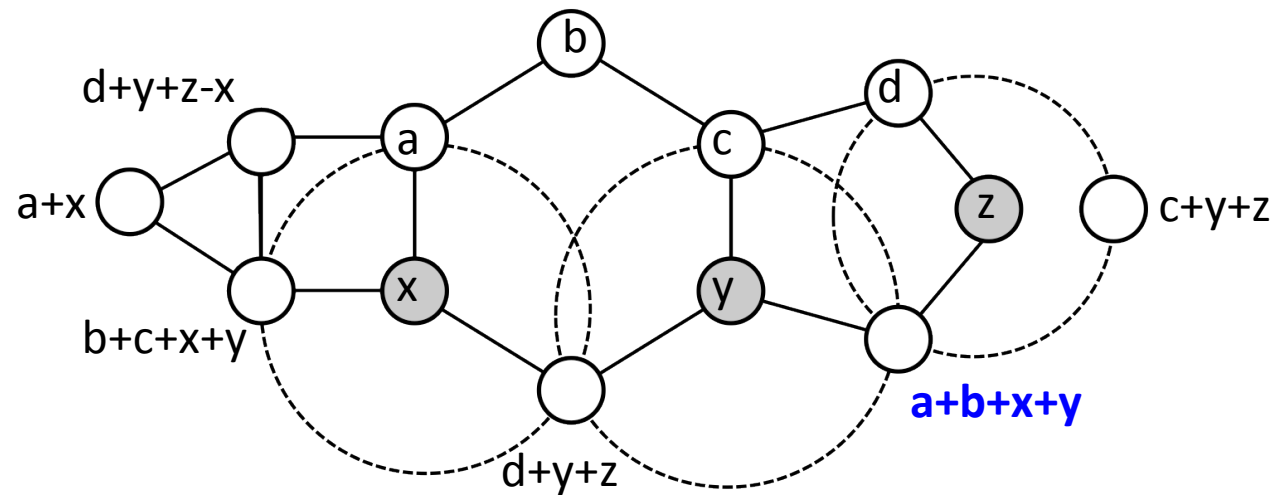
Jour 1 – Problème 15 – Les suites arithmétiques

- Pour **au plus 20**, il ne faut utiliser que les raisons 1 et 3
- Les suites à gauche et à droite sont orientées pour que ni un A ni un C ne soit un B
- Les trois suites sont de raison 1 sinon la verte contiendrait au moins 21
- D est l'un des E ou l'un des F, contradiction
- On peut obtenir 21
- Réponse : **21**



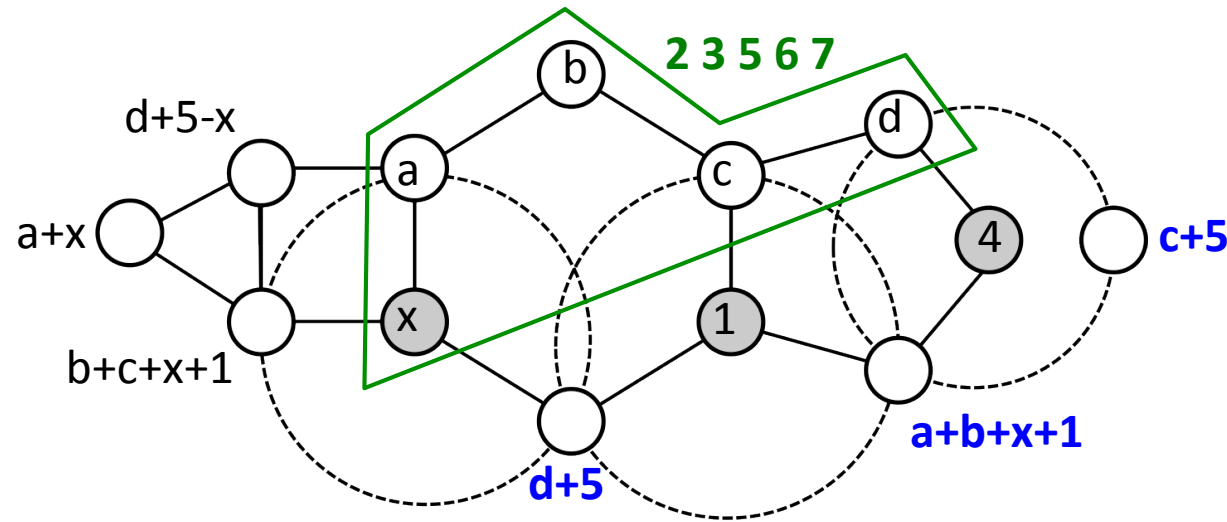
5	6	7	8	9
4		10		12
3		13		15
2		16		18
1		19		21

Jour 1 – Problème 16 – La Maths Mobile



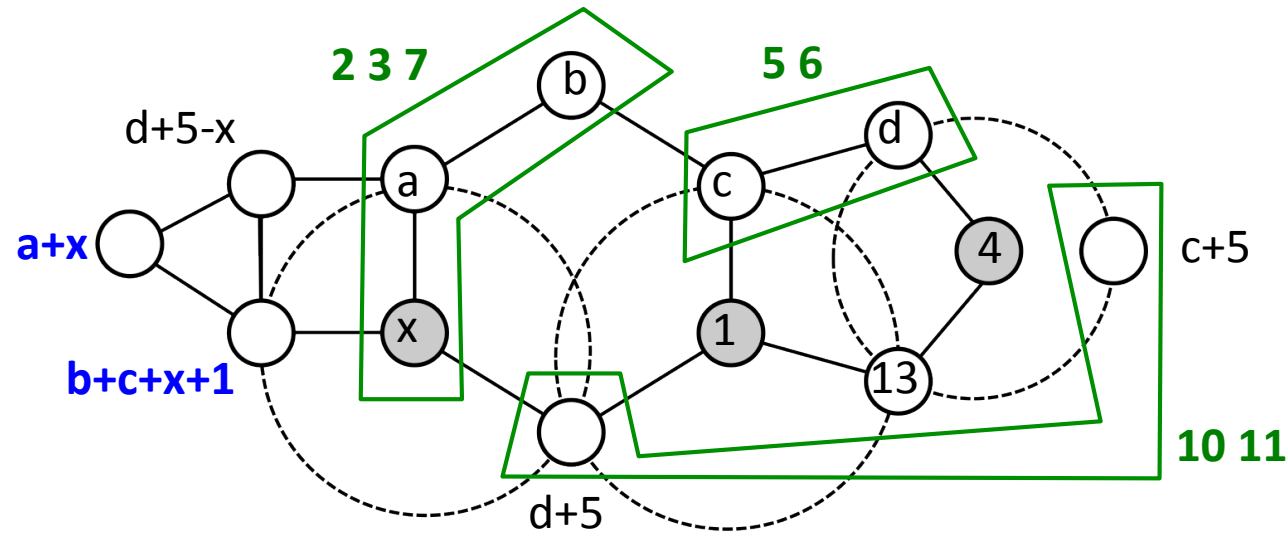
- On obtient tous les nombres en fonction de sept inconnues
- Soit S la somme constante
- $S = a + b + c + d + x + 2y + z \geq 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 2 + 7 = 29$
- $3S$ (triangle, hexagone, cercle à droite) plus z est la somme des entiers de 1 à 13, soit 91, $S \leq 30$
- **Si** $S = 30$, $z = 1$, $y = 2$, $a + b + x + y \geq 3 + 4 + 5 + 2 = 14$
- $S = 29$, $z = 4$, $y = 1$, $\{a, b, c, d, x\} = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

Jour 1 – Problème 16 – La Maths Mobile



- $a + b + x + 1 \geq 2 + 3 + 5 + 1 = 11$
- Si $a + b + x + 1 = 11$, $\{a, b, x\} = \{2, 3, 5\}$, $\{c, d\} = \{6, 7\}$, $c + 5$ ou $d + 5$ double 11
- Si $a + b + x + 1 = 12$, $\{a, b, x\} = \{2, 3, 6\}$, $\{c, d\} = \{5, 7\}$, $c + 5$ ou $d + 5$ double 12
- $a + b + x + 1 = 13$, $\{a, b, x\} = \{2, 3, 7\}$, $\{c, d\} = \{5, 6\}$ et $\{c+5, d+5\} = \{10, 11\}$

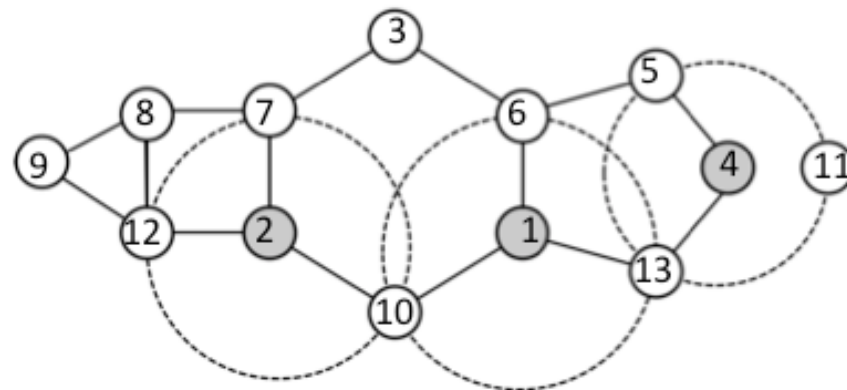
Jour 1 – Problème 16 – La Maths Mobile



- $b + c + x + 1 \geq 11$ vaut 12, $a = 7$ et $\{b, x\} = \{2, 3\}$, $c = 6$ et $d = 5$
- $a + x \geq 9$ vaut 9, $x = 2$ et $b = 3$

• Réponse : **8**

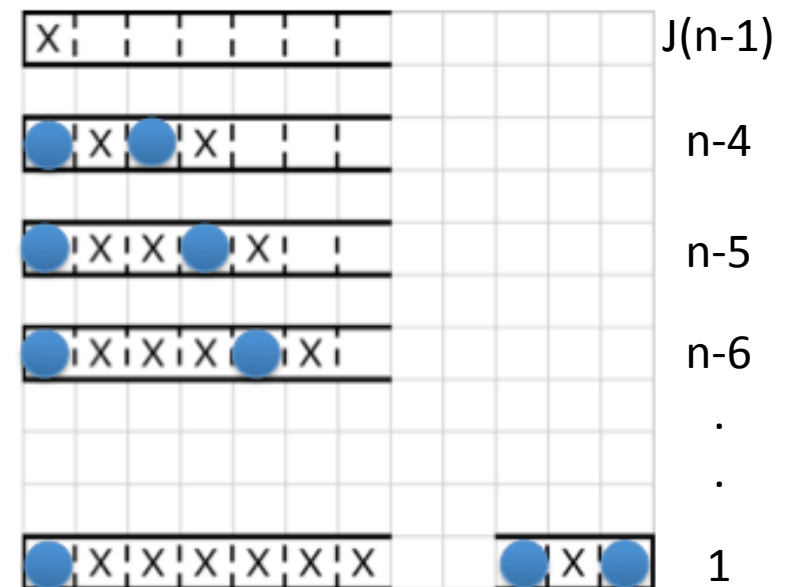
- *On vérifie que $d + 5 - x = 8$*
- *La configuration est unique*



Jour 1 – Problème 17 – Les trois jetons

- Soit $J(n)$ la formule générale pour une grille $1 \times n$, avec $5 \leq n$

- Si la première case à gauche est vide, on est ramené à $J(n-1)$
- Sinon, si le deuxième jeton est placé sur la 3^{ème} case à partir de la gauche, il reste $(n-4)$ cases possibles pour le troisième jeton, etc.
- $J(n) = J(n-1) + (n-4)(n-3)/2$



- $J(n)$ est un polynôme de degré 3
- A une constante près, $J(n) = (n-4)(n-3)(n-2)/6$
- $J(5) = 1$, la constante est nulle, on vérifie que $J(6) = 4$ et $J(7) = 10$

Jour 1 – Problème 17 – Les trois jetons

- $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
- Un seul des trois facteurs est divisible par 3, et même par 27
- Un seul des trois facteurs est divisible par 32
- Modulo 27, si $4 + 32k \equiv 3$, $k \equiv 55k = 11 \times (32-27)k \equiv 11 \times 32k \equiv 11(3-4) \equiv 16$ donne $4 + (32 \times 16) = 516$, etc.

N Modulo 27 x 32 = 864	N-4	N-3	N-2	est divisible par 27
N-4	4	516	164	
N-3	355	3	515	
N-2	706	354	2	N < 5 ou N > 500

est divisible par 32

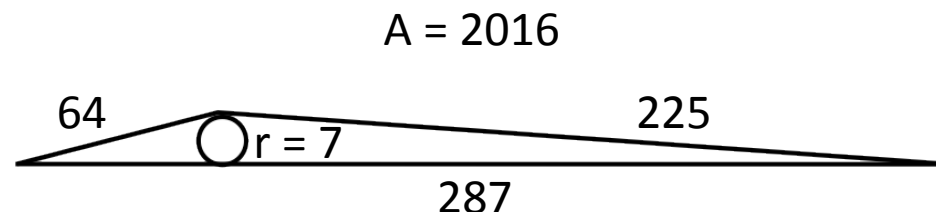
- $164 - 3 = 161$ et $354 - 4 = 350$ sont divisibles par 7 (mais 355 est trop loin)
- 2 réponses : **164** et **354**

Jour 1 – Problème 18 – Le cercle de culture

- $A = 2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
- $A^2 = (a+b-1)(a-1)(b-1) \leq (a+b-1)((a-1)+(b-1))^2/4 < (a+b-1)^3/4$
- $254 \leq a+b-1$
- Soit r le rayon du cercle inscrit
- $A = (a+b-1)r$
- $r \leq 7$
- Pour chaque r , nous devons résoudre le système :
 - $\left\{ \begin{array}{l} a+b = 1 + A/r \\ ab = (a-1)(b-1) + (a+b-1) = A^2r/A + A/r = (r^2+1)A/r \end{array} \right.$
- Le discriminant Δ vaut $(1 + A/r)^2 - 4(r^2+1)A/r < (A/r - 2r^2 - 1)^2$
- La réponse est $2A/r$ si Δ est le carré d'un entier (impair)

Jour 1 – Problème 18 – Le cercle de culture

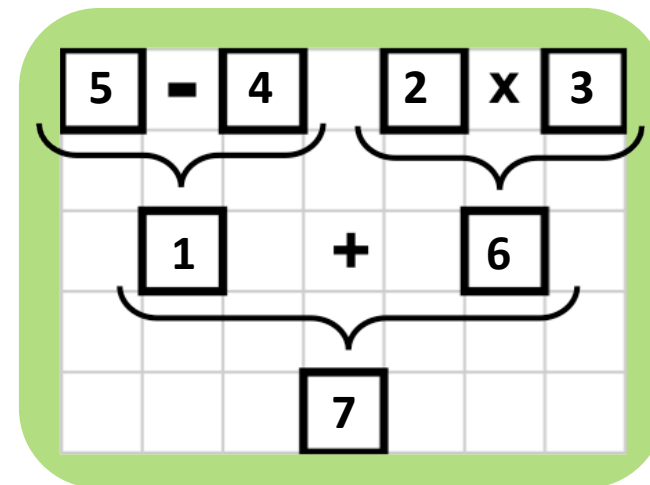
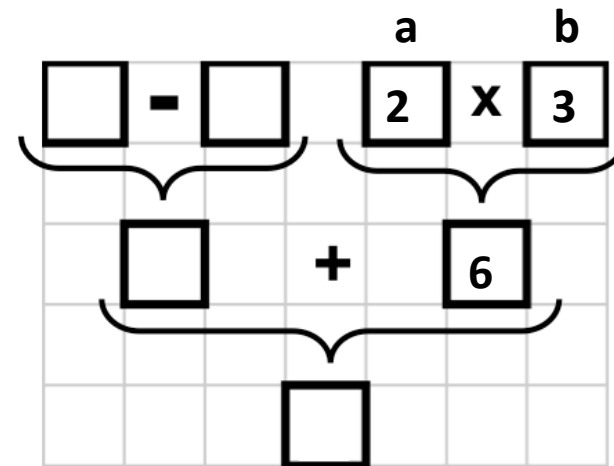
- **Si** $r = 1, 2$ ou 3 , $\Delta - (A/r - 2r^2 - 2)^2 = 2A/r - (2r^2+1)(2r^2+3) \geq 945 > 0$,
 $A/r - 2r^2 - 2 < \sqrt{\Delta} < A/r - 2r^2 - 1$, $\sqrt{\Delta}$ n'est pas entier
- **Si** $r = 4$, $\Delta = (1 + A/r)^2 - 4(r^2+1)A/r = 505^2 - (4 \times 17 \times 504)$ se termine par 3
- **Si** $r = 5$, il ne divise pas A
- **Si** $r = 6$, $\Delta = 337^2 - (4 \times 37 \times 336) = 63841 = 251^2 + 840 < 259^2$
- $r = 7$, $\Delta = 289^2 - (4 \times 50 \times 288) = 289^2 - (450 \times 128) = 161^2$
- a et b valent $(289 \pm 161)/2$, $a+b-2$ vaut 287



- Réponse : **576** m

Jour 2 – Problème 1 – Devine nombres

- Le produit n'a pas de facteur 1
sinon un chiffre serait
utilisé deux fois
- $2 \times 3 = 6$
(a plus petit que b)
- La case en bas est $1 + 6 = 7$
- Il reste $5 - 4 = 1$
- *La configuration est unique*

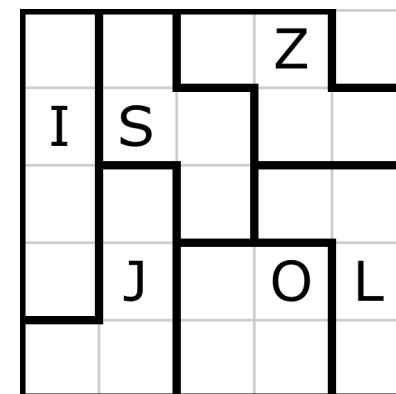
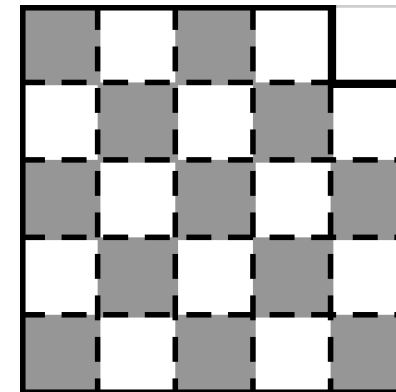


Jour 2 – Problème 2 – Devine lettres

- Le résultat est plus petit que $(3 \times 10) + (2 \times 100) + 1000 = 1230$
- $D = 1$
- C doit être grand, on commence par tester 9
- $1111 - 999 = 112 = A + A + A + BB + BB$
- $B = 5$ est trop grand car il reste $112 - 110 = 2$ pour $A + A + A$
- $B = 4$ convient car il reste $112 - 88 = 24$, $A = 8$
- Réponse : **A = 8, B = 4, C = 9, D = 1**
- $112 - 33 - 33 = 46$ plus grand que $27 = 9 + 9 + 9$, B plus petit ne convient pas
- $7 + 7 + 7 + 99 + 99 + 888 = 1107$ plus petit que 1111, C est plus grand que 8
- La réponse est unique

Jour 2 – Problème 4 – Les tetraminos

- On colorie chaque case de la grille tronquée en noir ou en blanc de sorte que deux cases de même couleur ne se touchent jamais par un côté
- On compte 12 de cases de chaque couleur
- Chacun des tetraminos sauf le T recouvre deux cases de chaque couleur
- Réponse : **T**
- *On vérifie que c'est possible (plusieurs configurations)*



Jour 2 – Problème 5 – Les deux suites

- Le 6^{ème} nombre de deux chiffres est au moins égal au 5^{ème}

					2		1	6		6	
--	--	--	--	--	---	--	---	---	--	----------	--

- a est au plus égal à c
- c est au plus égal à e
- e est plus petit que f
- g est plus petit que h

a	b	c	d	e	2	f	1	6	g	6	h
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- a est au plus égal d
- d est plus petit que f (si d=f, e=1)
- f est au plus égal à g

a	b	c	d	e	2	f	1	6	g	6	h
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- h = 5, b = 5, a = 1

1	5	c	d	e	2	f	1	6	g	6	5
----------	----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----------

Jour 2 – Problème 5 – Les deux suites

- c est au plus égal à e
- d et e sont plus petits que f
- f est au plus égal à g

1	5	c	d	e	2	f	1	6	g	6	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- $g = 4, f = 4$

1	5	c	d	e	2	4	1	6	4	6	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- $c \neq 3$ sinon cd = e2

1	5	3	2	3	2	4	1	6	4	6	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

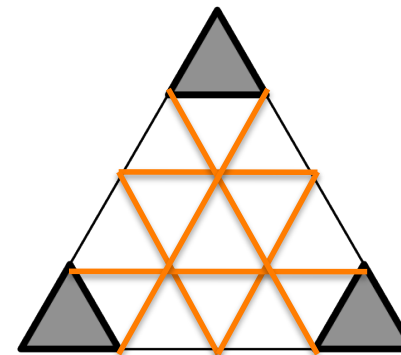
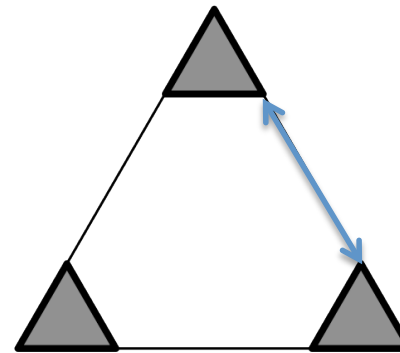
- Réponse : **152**

- *La configuration est unique*

1	5	2	3	3	2	4	1	6	4	6	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Jour 2 – Problème 6 – Le château

- La longueur d'un grand côté de l'hexagone est $3 - 1 = 2$ fois celle d'un côté de triangle
- La superficie de l'hexagone est 13 fois celle d'un triangle
- $13 \times 77 = 1001$
- Réponse : **1001** m²



Jour 2 – Problème 7 – Triangles et carrés

- 16 figures bleues de plus que de triangles rouges (X)
- 20 triangles, dont $(20 - X)$ bleus
- 1 triangle bleu de plus que de figures rouges, donc $19 - X$ figures rouges
- $(X + 16) + (19 - X) = 35$ figures, dont $35 - 20 = 15$ carrés
- Réponse : **15** carrés
- *X peut prendre les valeurs de 3 à 9*

	Bleu	Rouge	
Triangles		X	
Carrés			?
Figures	X + 16		

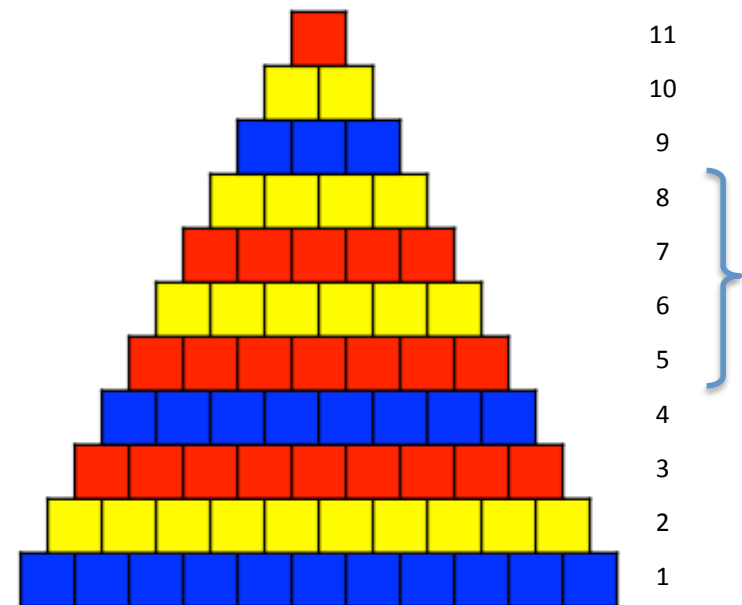
	Bleu	Rouge	
Triangles	20 - X	X	20
Carrés			?
Figures	X + 16	19 - X	

Jour 2 – Problème 8 – La pyramide

- Avec 11, 22 peut être décomposé en [11 6 4 1], [11 7 3 1], [11 7 4], [11 8 3] ou [11 9 2]
- Dans les trois premiers cas, 10 et 8 sont de l'autre couleur que de celle du 9
- Il manque 4 pour les compléter
- Dans le **premier** cas, on ne peut pas l'obtenir
- Dans le **deuxième** ou **troisième** cas, on l'obtient avec 4 ou 3 et 1, mais 5 et 6 sont de la même couleur, celle de 9 et 2
- Dans le **cinquième cas**, 8, 6 et 4 sont de la même couleur tandis que 7, 5 et 3 sont de la même autre couleur
- 10 est trop grand pour compléter à 22 l'une de ces couleurs

Jour 2 – Problème 8 – La pyramide

- Il ne reste que le quatrième cas, [11 8 3]
- 7 et 5 sont de la même couleur tandis que 6 et 4 sont de la même autre couleur
- 10 ne complète pas 7 et 5
sinon 1 et 2 seraient de la même couleur,
celle de 9, 6 et 4
- 10 complète 6 et 4, puis 2
- *La configuration est unique
(à la permutation des couleurs près)*
- En termes de numéros, $5 + 6 + 7 + 8 = 26$
- Réponse : **26**



Jour 2 – Problème 9 – Le train

- Soit C le nombre de compartiments par wagon non restaurant
- **Si** le wagon restaurant est avant le 4^{ème} wagon
- $39 \leq 3C$, soit $13 \leq C$ (Hercule Poirot) et $6C + 1 \leq 63$ (Miss Marple) sont contradictoires
- **Si** il est après le 8^{ème} wagon
- $39 \leq 4C$, donc $10 \leq C$ (Hercule Poirot) et $7C + 1 \leq 63$ (Miss Marple) sont contradictoires



2 wagons avec
compartiments



4



8



4



8



Jour 2 – Problème 9 – Le train

- Le wagon restaurant est entre les 4^{ème} et 8^{ème} wagons
- $39 \leq 4C$, donc $10 \leq C$
(Hercule Poirot)
- $6C + 1 \leq 63$, donc $C \leq 10$
(Miss Marple)
- $C = 10$
- Réponse : **10** compartiments



4



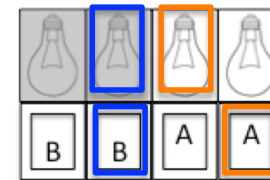
2 wagons avec
compartiments



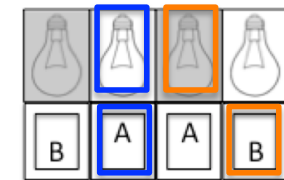
8

Jour 2 – Problème 10 – Les interrupteurs

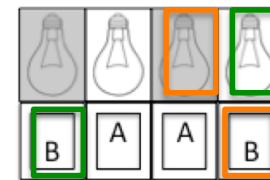
- En comparant deux essais, on trouve la paire d'interrupteurs qui agit sur une paire de lampes
- En comparant deux paires à la verticale (une sur chaque ligne), on trouve l'interrupteur qui agit sur la lampe commune (aux deux paires)
- Réponse : **BABA**



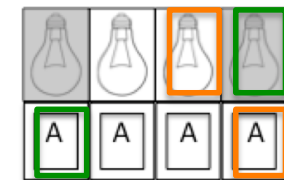
Essai gauche



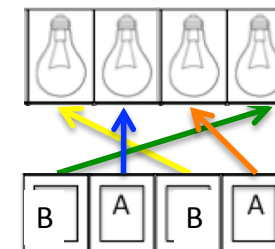
Essai milieu



Essai milieu



Essai droite



Jour 2 – Problème 11 – Le carré hétérogène

- Le total des huit sommes est 113
 - Le total des six sommes non diagonales est le double de la somme des entiers de 1 à 9, soit 90
 - Le total des deux sommes diagonales est $113 - 90 = 23$
 - Ce sont 11 et 12 (13 est interdit)
-
- Dans une direction, 10 ne peut être complété à 45 qu'avec 17 et 18
 - Dans l'autre direction, les sommes sont 14, 15 et 16

6		
		5

Jour 2 – Problème 11 – Le carré hétérogène

- **Si** la diagonale de somme 12 est celle du 6
- Les deux autres nombres sont 2 et 4
- Dans le **premier cas** (en haut), le complément de 2 à 11 ne peut être obtenu qu'avec 1 et 8
- 1 n'est pas en bas, sinon la somme à la verticale du 6 serait égale à celle à l'horizontale des 2 et 5
- Les sommes 17 et 18 sont à la verticale, comme 10
- Dans la colonne du 6, on ne peut obtenir que 17, avec 3, mais la somme 10 est doublée à l'horizontale
- Dans le **second cas** (en bas), le complément de 4 à 11 ne peut pas être obtenu

6		1
3	2	5
8		4

6		
	4	5
		2

Jour 2 – Problème 11 – Le carré hétérogène

Si le complément de 6 à 11 est obtenu avec 2 et 3

- Dans le **premier cas** (en haut), le complément de 2 à 12 ne peut être obtenu qu'avec 1 et 9
- La somme 10 est à la verticale du 2, avec 1, doublé, et 7
- Dans le second cas (en bas), le complément de 3 à 12 ne peut être obtenu qu'avec 1 et 8
- La somme 10 est à l'horizontale du 2, avec 1 et 7
- On obtient **une première réponse**

6		
	2	5
		3

6	4	8
9	3	5
1	7	2

Jour 2 – Problème 11 – Le carré hétérogène

Si le complément de 6 à 11 est obtenu avec 1 et 4

- Dans le **premier cas** (en haut), le complément de 4 à 12 ne peut pas être obtenu
- Dans le second cas (en bas), la somme 10 est à la verticale du 1, avec 2 et 7
- Le complément de 1 à 12 est obtenu avec 3 et 8
- On place le 9
- On obtient **la seconde réponse**

6		
	4	5
		1

6	2	8
9	1	5
3	7	4

Jour 2 – Problème 12 – Devine cartes

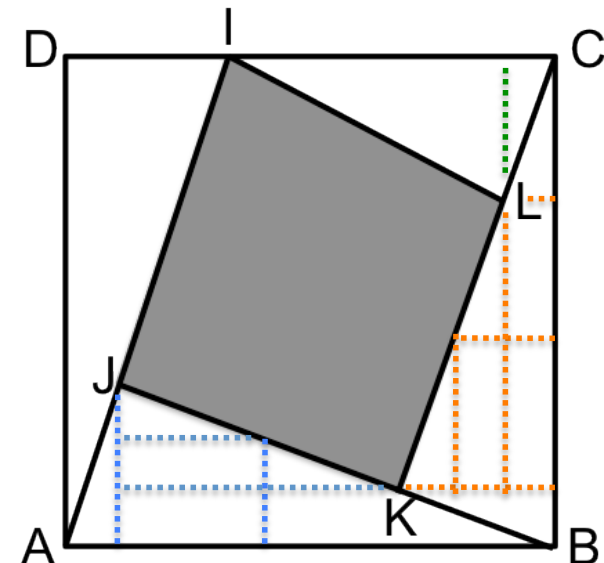
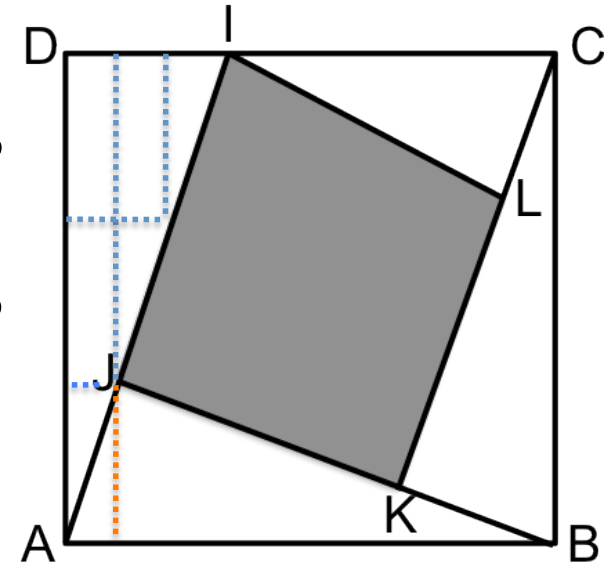
- Si un seul nombre est utilisé,
on n'obtient qu'une seule somme, son double
- Si deux nombres $a < b$ sont utilisés,
on obtient au plus trois sommes différentes ($2a < a+b < 2b$)
- $54 < 66 < 78$ donne $a = 54/2 = 27$ et $b = 78/2 = 39$
- a et b sont utilisés au moins deux fois
- La somme des sept nombres est 213, 225, 237 ou 249
- Les divisions par 3 donnent 71, 75, 79 ou 83
- Seul **75** n'est pas premier

Jour 2 – Problème 12 – Devine cartes

- Si trois nombres $a < b < c$ sont utilisés,
on obtient au moins trois sommes différentes ($a+b < a+c < b+c$)
- $54 < 66 < 78$ donne $a+b+c = (54+66+78)/2 = 99$ puis $a = 21$, $b = 33$ et $c = 45$
- a et c sont utilisés une seule fois sinon on obtiendrait la somme 42 ou 90
- La somme des sept nombres est 231, **77** n'est pas premier
- **Si** au moins quatre nombres $a < b < c < d$ sont utilisés,
on obtient plus de trois sommes différentes ($a+b < a+c < a+d < b+d$)
- 2 réponses : **75** et **77**

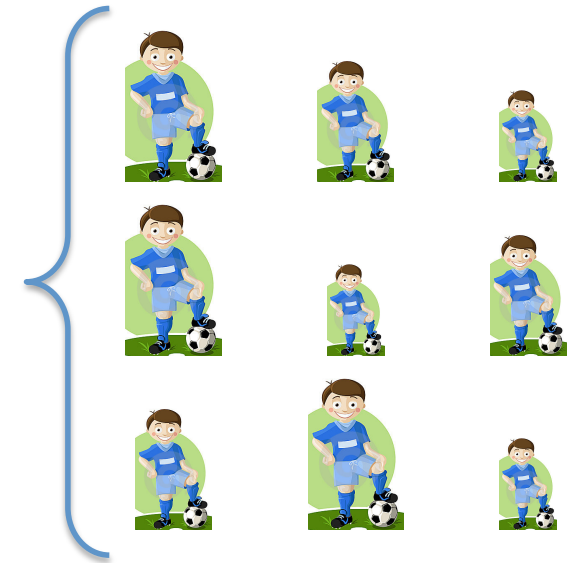
Jour 2 – Problème 13 – Le presque carré

- La superficie de IDA est $(9/3) \times 9 / 2 = 13,5$
- La superficie de JAB est $(9/3) \times 9 / 2 = 13,5$
- La superficie de KBC est $((9 - (3/3)) / 3) \times 9 / 2 = 12$
- La superficie de LCI est $((9 - (3/3)) / 3) \times (9 \times 2/3) / 2 = 8$
- $(9 \times 9) - (13,5 + 13,5 + 12 + 8) = 34$
- Réponse : **34** cm²



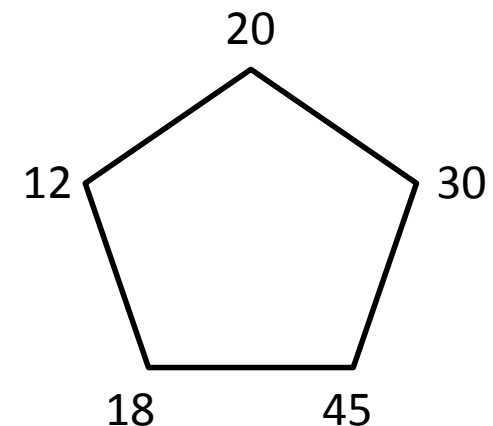
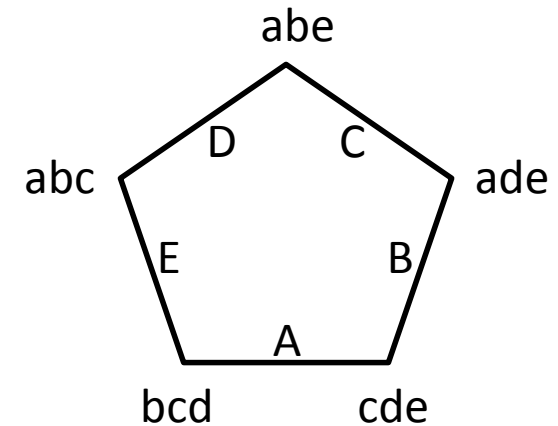
Jour 2 – Problème 14 – Presque dans l'ordre

- Si le joueur qui mesure 190 cm est à l'extrême gauche, on est ramené au même problème avec 10 joueurs
- Sinon, tout joueur à sa gauche devant mesurer au moins 187 cm, il est juste à droite du joueur mesurant 188 cm qui, lui, est à l'extrême gauche, et on est ramené au même problème avec 9 joueurs
- Etc. (*c'est une suite de Fibonacci*)
- Il y a 2 façons d'aligner 2 joueurs ($F_2 = 2$)
- Il y a 3 façons d'aligner 3 joueurs ($F_3 = 3$)
- $F_{11} = F_{10} + F_9 = 2F_9 + F_8 = \dots = 34F_3 + 21F_2 = 144$
- Réponse : **144** façons



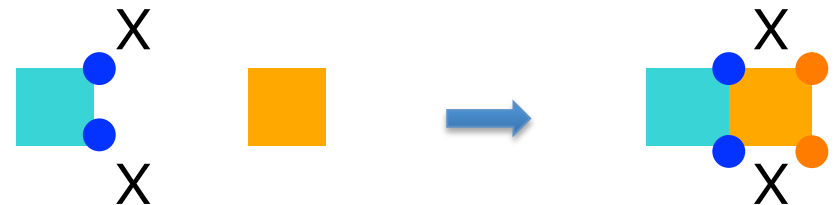
Jour 2 – Problème 15 – Les basketteurs

- Les contenances des verres des deux joueurs aux extrémités du segment A ne sont pas multiples d'au moins un nombre premier, a , divisant les contenances des verres des trois autres joueurs et la taille de Zita
- Idem pour chacun des autres segments
- $b \neq e, c \neq a, d \neq b, e \neq c$ et $a \neq d$
- Il y a au maximum deux égalités, par exemple $b = a$ et $d = c$
- La taille de Zita est alors $a^2 c^2 e \leq 200$
- $b = a = 2, d = c = 3$ et $e = 5$
- Réponse : **180** cm

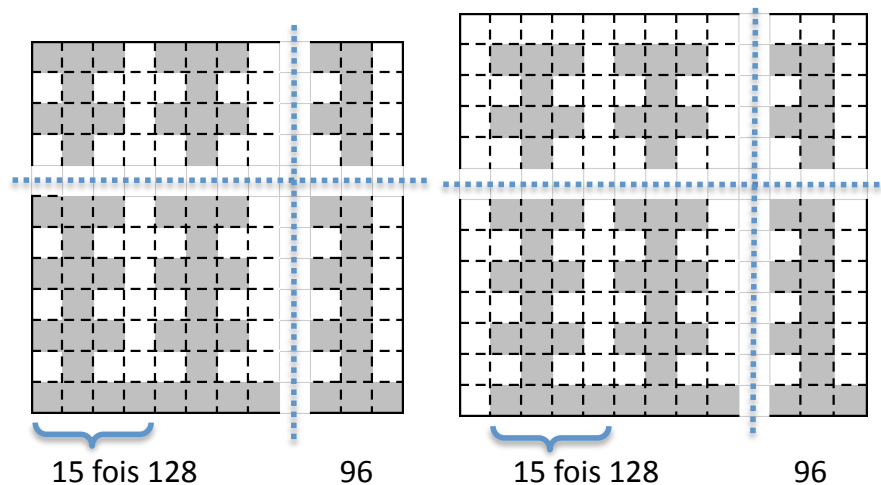


Jour 2 – Problème 16 – D'un seul tenant

- Si E est le nombre de sommets du coloriage, l'aire est $E/2 - 1$
- C'est vrai pour une seule case ($E = 4$)
- Si l'on ajoute une case à un coloriage, E augmente de 2, $E/2 - 1$ augmente bien de 1

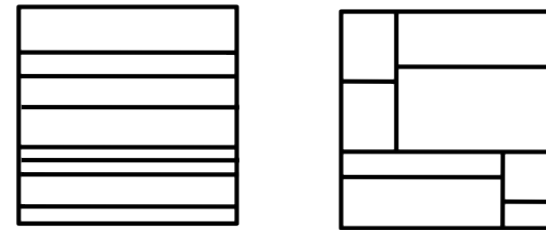


- Le nombre de sommets du coloriage est au plus celui de la grille, $E \leq (N+1)^2$
- Chacun des sommets intérieurs à la grille en est un du coloriage, $E \geq (N-1)^2$
- $E/2 - 1 = 2016$, $E = 4034$
- $(N-1)^2 \leq 4034 \leq (N+1)^2$
- 2 réponses : **63** et **64**



Jour 2 – Problème 17 – Les découpages

- Soient H et V le nombre de tours horizontaux et verticaux
- La somme des périmètres est $2^{(H+1)} + 2^{(V+1)}$
(3 et 0 donnent 18; 2 et 1, 12)
- On décompose 2016 en somme de puissances de 2 (écriture binaire)
- Les trois découpages, de 13 tours, sont 4 et 9, 5 et 8, 6 et 7
(H et V, l'ordre étant indifférent)
- Réponse : **13** tours



H ou V		2016	
4	2^5	32	
5	2^6	64	
6	2^7	128	
7	2^8	256	
8	2^9	512	
9	2^{10}	1024	

Jour 2 – Problème 18 – La station de ski

- Par les triangles isocèles, on obtient des angles multiples de $\alpha = \pi/7$
- Prenons $AB = BC = CD = DE = 1$ pour calculer
- Dans le triangle ABE (Al Kashi au sommet A)
- $BE^2 = 1 + (2\cos\alpha + 2\cos3\alpha)^2 - 2(2\cos\alpha + 2\cos3\alpha)\cos\alpha$
- $BE^2 = 1 + (2\cos3\alpha (2\cos\alpha + 2\cos3\alpha))$
- $BE^2 = 1 + (8 \cos\alpha \cos2\alpha \cos3\alpha)$
- $BE^2 = 1 + (\cancel{\sin2\alpha} \cancel{\sin4\alpha} \cancel{\sin6\alpha} / \cancel{\sin\alpha} \cancel{\sin2\alpha} \cancel{\sin3\alpha})$
- $BE^2 = 1 + 1 = 2$
- Réponse : $700\sqrt{2} \approx \mathbf{990}$ m

