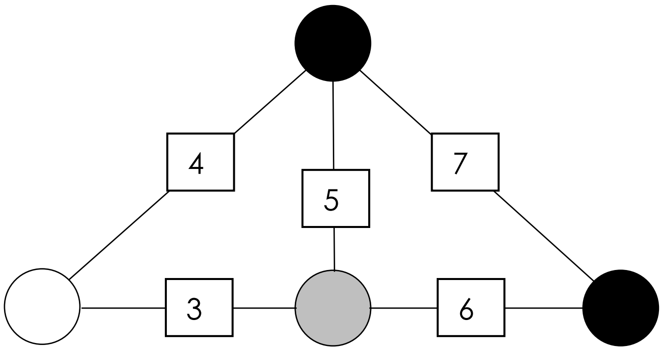
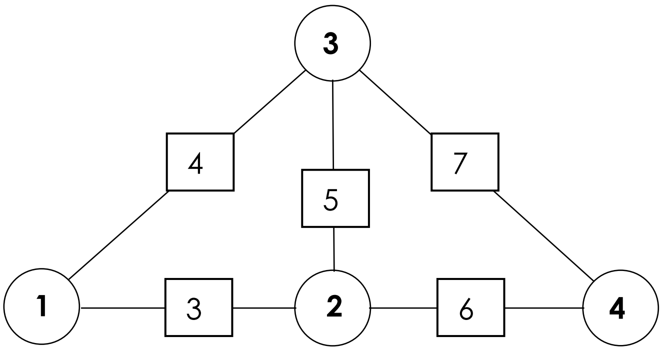
Quart de finale – Automne 2017

1. Quatre nombres à placer



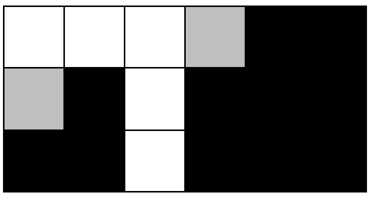
Il s'agit de remplir les 4 disques sur le schéma ci-contre avec les chiffres de 1 à 4.
Les disque blanc et gris doivent contenir les chiffres 1 et 2.
Or le gris ne peut pas contenir le chiffre 1 car il serait impossible d'obtenir le 6 souhaité.
On peut en déduire que le disque gris contient un 2.
Il est, ensuite, simple de compléter le reste de la figure pour obtenir la solution suivante :



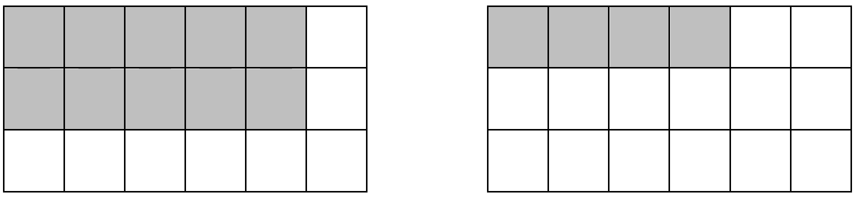
2. Les carrés

On sait qu'il y a 18 petits carrés.

Observons la grille avec un carré moyen et un grand carré :



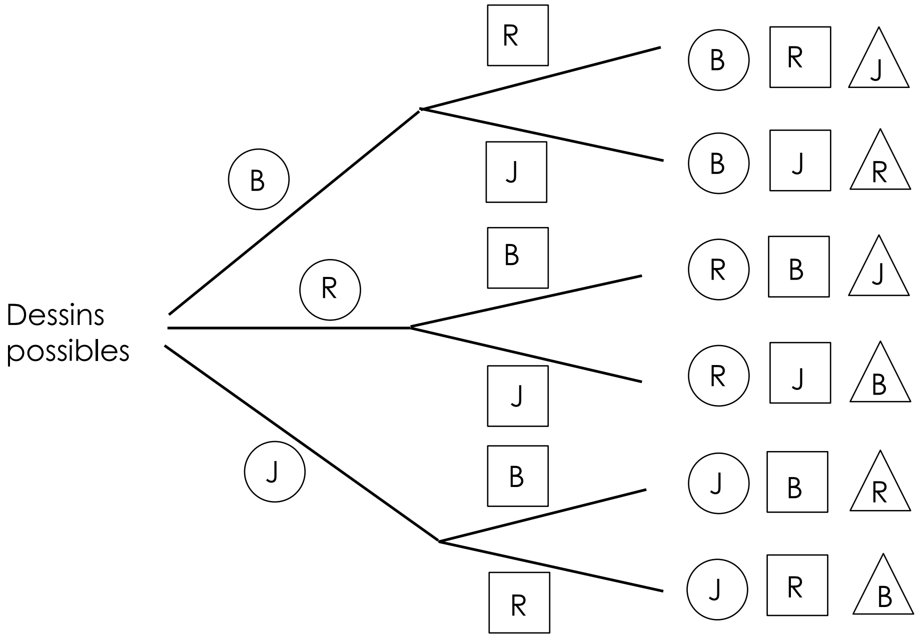
Le coin en haut à gauche a été grisé. La question que nous devons nous poser est où pouvons-nous placer ces coins afin de construire des carrés qui ne sortent pas de la grille.
Nous trouvons 10 possibilités pour les carrés moyens et 4 pour les grands carrés :



Il existe donc **32 carrés** dessinés sur cette figure.

3. A la maternelle

On souhaite un maximum de dessins différents alors tentons d'aider ces enfants en observant tous les cas de figure possibles sur l'arbre suivant :



Il y a 6 dessins possibles. Or on sait que dans le groupe 2 enfants se sont retrouvés avec un dessin similaire.

Il y avait **7 enfants** dans le groupe, au maximum.

4. La coccinelle

La difficulté principale est de gérer convenablement les carrefours. Observons toutes les possibilités sur les dessins ci-dessous.

	1	2	3	4
11				5
10	9	8	7	6

	1	2 / 10	3 / 11	4
		9		5
		8	7	6

	1 / 11	2 / 10	3	4
		9		5
		8	7	6

8	1 / 9	2 / 10	11	
7		3		
6	5	4		

8	1 / 9	2 / 10		
7		3 / 11		
6	5	4		

	1 / 11	2 /10	9	8
		3		7
		4	5	6

	1	2 /10	9	8
		3 / 11		7
		4	5	6

Il devient simple de conclure :

	X		X	
X		X		

5. L'anniversaire

Lisons la phrase attentivement. Dans ce récit, 3 jours interviennent. Nous nommerons J_1 : avant-hier, J_2 : hier et J_3 : aujourd'hui.

Nous savons que Mathis avait 8 ans, ou moins, en J_1 car il n'avait pas encore soufflé les 9 bougies.

En J_3, Mathis est dans une année durant laquelle il n'a pas encore eu son anniversaire. De plus son prochain anniversaire sera ses 10 ans. On peut affirmer qu'il a 9 ans et que ce n'est pas son anniversaire.

On peut en déduire qu'en J_2, Mathis a fêté ses 9 ans. On sait également que J_2 n'appartient pas à la même année que J_3.

Mathis fête son anniversaire **le 31 décembre**.

En effet, le 30 décembre, il avait 8 ans. Le 31 décembre, il a fêté ses 9 ans. Et le 1er janvier, on pouvait affirmer qu'il fêterait ses 10 ans avant la fin de l'année.

6. Suite

Détaillons le premier passage.
Nous partons de 718.
$7 + 1 + 8 = 16$ et $16 \cdot 13 = 208$, cela nous montre que le deuxième terme de la suite est 208.

Observons les premiers termes de la suite :

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Terme	718	208	130	52	91	130	52	91	130

Tous les 3 termes, nous retrouverons 130. De plus, nous remarquons que 130 tombe sur les numéros qui sont des multiples de 3.
Le 2016ème terme sera 130, le 2017ème terme sera 52 et **le 2018ème terme sera 91**.

7. Le livre de Mathilde

La somme des chiffres de 2 pages qui se suivent doit valoir 18.

Si nous ne changeons pas de dizaine, ce procédé nous fournira toujours un nombre impair : ' x ' ' y ' et ' x ' ' y+1 ' nous amènent vers $2 \cdot x + 2 \cdot y + 1$.

Le cas qui nous intéresse est le suivant ' x ' ' 9 ' et ' x+1 ' ' 0 '.
De plus x doit valoir 4.

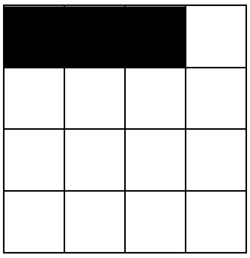
Il existe 2 possibilités dans ce livre : 49/50 et 139/140. Ces pages constituent le début et la fin du deuxième chapitre.

Il devient simple d'affirmer que le deuxième chapitre comporte **92 pages**.

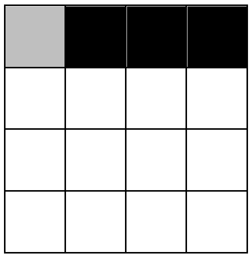
8. Les Triminos

L'idéal serait de placer des triminos qui ne recouvrent qu'une nouvelle case à chaque étape. Malheureusement cela n'est pas toujours possible.

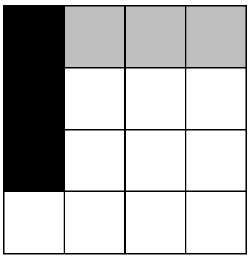
Lors de la première étape, nous sommes obligés de recouvrir 3 cases :

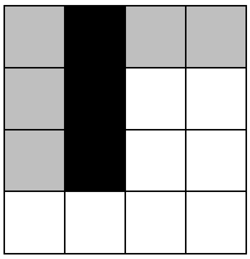


La deuxième étape nous permet de recouvrir une seule nouvelle case :



Les troisième et quatrième étape nous obligent à recouvrir 2 nouvelles cases :





Toutes les étapes suivantes nous permettent de recouvrir une nouvelle case à la fois. Il reste, donc, 8 étapes.

On peut poser, au maximum, **12 triminos**.

9. Le club de basket

Un tableau de proportionnalité nous permet de bien saisir la situation :

Garçons	40	
Filles	60	
Nouveaux garçons	20	6
Membres	120	

S'il y a 40% de garçons, il y 60% de filles. Un club de 100 personnes comporterait 40 garçons et 60 filles. Or dans ce club, 20 garçons devraient s'inscrire pour qu'il y ait autant de garçons que de filles. Il comporterait alors120 membres.

Nous cherchons une situation proportionnelle à celle-là mais dans laquelle, il n'y aurait que 6 garçons qui s'inscriraient en cours de route. Dans ce cas, il y aurait initialement 12 garçons et 18 filles.

Le club compterait, finalement, **36 inscrits**.

10. Loterie

Listons au mieux les billets gagnants à l'aide d'un tableau dans lequel x désigne un chiffre autre que 1 ou 6 :

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4	Billets gagnants
1	1	6	x	8
1	6	1	x	8
6	1	1	x	8
1	1	x	6	8
1	6	x	1	8
6	1	x	1	8
1	x	1	6	8
1	x	6	1	8
6	x	1	1	8
x	1	1	6	8
x	1	6	1	8
x	6	1	1	8
1	1	1	6	1
1	1	6	1	1
1	6	1	1	1
6	1	1	1	1
1	1	6	6	1
1	6	1	6	1
1	6	6	1	1
6	1	1	6	1
6	1	6	1	1
6	6	1	1	1

Il y a **106 billets gagnants**.

11. Le bateau

Si nous trouvons une distance et une vitesse correspondant à cette consigne, nous répondrons à la question. En effet, toutes les autres possibilités sont uniquement des cas proportionnels au cas décrit. Tentons de trouver la solution ainsi.

Si le bateau avance à 40 km/h sur la première partie de son trajet, il devra poursuivre sa route à 50 km/h.
Il s'agit, ensuite, d'inventer la longueur de la première partie du chemin afin que le bateau gagne 30 minutes sur la deuxième partie de son chemin.
100 km est la longueur cherchée. En effet, cette distance est parcourue en 2h30 à 40 km/h, puis en 2h à 50 km/h.

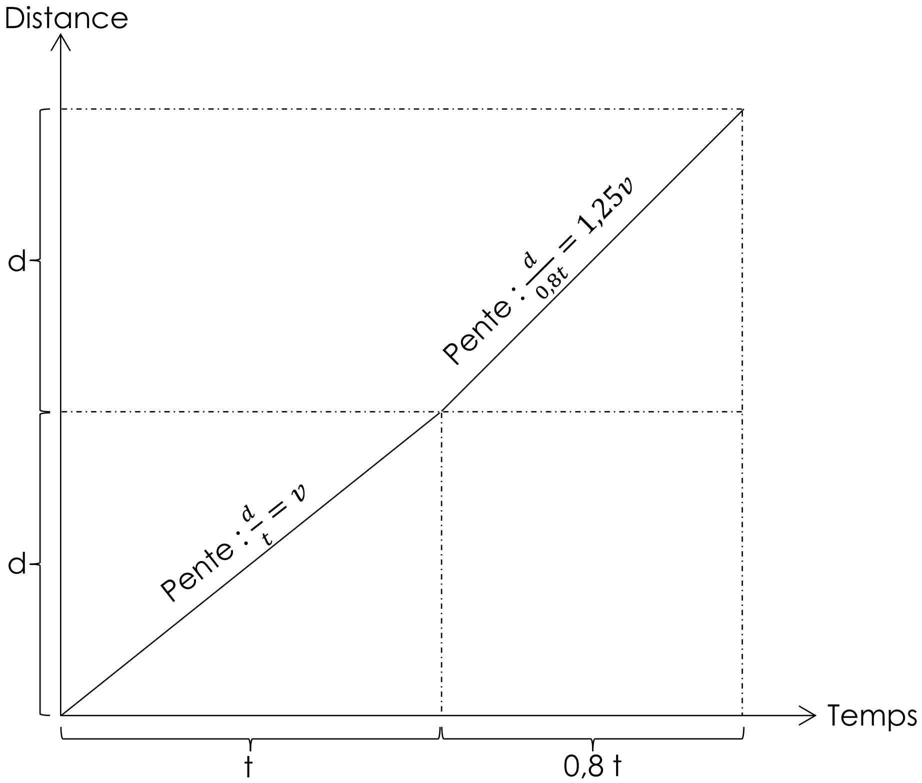
Ce bateau a navigué 2h30 et 2h00, soit **4h30**.

Optons tout de même pour une approche plus rigoureuse. Souvenons-nous que les distances parcourues durant la première et la seconde moitié sont les mêmes. De plus la distance et obtenue en multipliant la vitesse par le temps. Cela nous permet de construire le tableau ci-dessous:

	Première moitié	Seconde moitié
Distance	d	d
Vitesse	v	1,25v
Temps	t	0,8t

Or en sachant que t – 0,8t = 0,2t = 30 min, nous pouvons affirmer que t = 2h30.

On peut finalement représenter graphiquement le tableau ci-dessus pour les plus visuels d'entre nous.

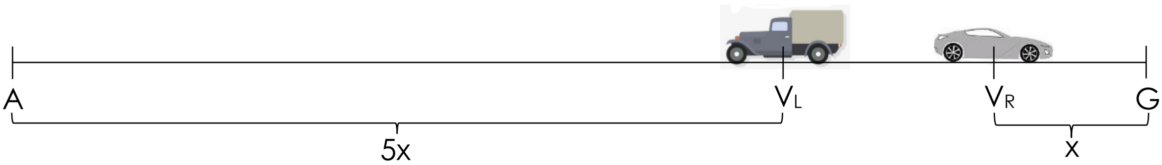


12. Course automobile

Utilisons les éléments de la donnée les uns après les autres.

Premièrement, si la voiture la plus rapide (V_R) était partie de Géocity (G), elle serait plus éloignée de G que la voiture la plus lente (V_L) le serait d'Arithméville (A). On peut affirmer que V_R part de A.

Continuons en utilisant le fait que V_R est 5 fois plus proche de G que V_L ne l'est de A :



Notons que sur ce dessin, les voitures se sont déjà croisées. Dans la suite du raisonnement, nous n'en tenons pas compte. S'il existe des solutions dans lesquelles les voitures ne se seraient pas encore croisées, elles devraient apparaitre.

La distance entre A et G est de 200 km et les voitures ont roulé durant 2 h, nous pouvons en déduire la distance parcoure par chaque voiture en une heure. Il nous suffit d'admettre que x est donné en km.

V_R a une vitesse de (100 – 0,5x) km/h et V_L a une vitesse de (100 – 2,5x) km/h.

Finalement ces vitesses doivent être des nombres entiers donc x doit être un nombre pair, et, leur différence, à savoir 2x doit être un multiple de 7.

On comprend que x doit être un multiple de 7 pair et 5x ne doit pas dépasser 200.

Il existe **2 solutions**, x peut être égal à 14 ou à 28. La voiture la plus rapide a une vitesse de **93 km/h** ou de **86 km/h**.

13. Un multiple singulier

Travaillons par essais successifs. Ce n'est guère élégant mais c'est efficace.

Est-il possible que la réponse soit un nombre à 4 chiffres ? Non, car 1'111 n'est pas un multiple de 2'018.

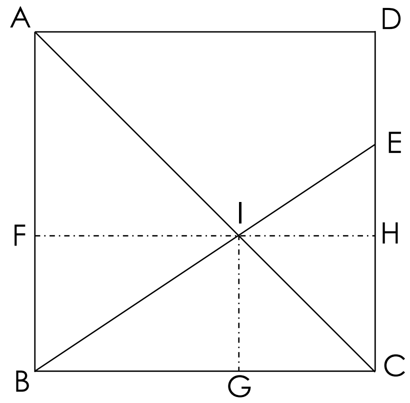
Est-il possible que la réponse soit un nombre à 5 chiffres ? Non car, 10'090 et 12'108 sont des multiples de 2'018 consécutifs.

Est-il possible que la réponse soit un nombre à 6 chiffres ? Non, car 110'990 et 113'008 sont des multiples de 2'018 consécutifs.

Est-il possible que la réponse soit un nombre à 7 chiffres ? Oui. Le premier multiple de 2'018 qui satisfait aux conditions est **1'111'918**.

14. Le petit bois

Dessinons la situation.



Il est aisé de déterminer les aires des triangles ABC et BCE qui valent respectivement 4’050 m^2 et 2’700 m^2.

Les triangles AIB et EIC sont semblables. En sachant que AB mesure 90 m et EC 60 m, on en déduit que FI (qui est égal à BG) mesure 54 m comme nous pouvons le comprendre sur le tableau suivant :

Bases [m]	90	60
Hauteurs [m]	54	36

Les proportions sont conservées et 54 + 36 valent 90.

Les triangles BGI et BCE sont semblables. En sachant que BG mesure 54 m, BC 90 m et CE 60 m, on en déduit que GI mesure 36 m.
On peut, dès lors, déterminer l’aire du triangle BIC qui est de 1'620 m^2.

Cela nous permet de trouver l’aire des triangles BIA et CIE par une simple soustraction. Elles valent respectivement 2'430 m^2 et 1'080 m^2. Finalement, on trouve l’aire du quadrilatère ADEI qui vaut 2'970 m^2. Sans surprise, c’est cette dernière surface qui a la plus grande aire.

La réponse cherchée est **2'970 m^2**.

15. La pyramide de Mick Erinos

Dessinons, à nouveau, la pyramide considérée avec une particularité : nous placerons 5 valeurs nommées a, b, c, d et e sur l’étage inférieur.

a+4b+6c+4d+e
a+3b+3c+d | b+3c+3d+e
a+2b+c | b+2c+d | c+2d+e
a+b | b+c | c+d | d+e
a | b | c | d | e

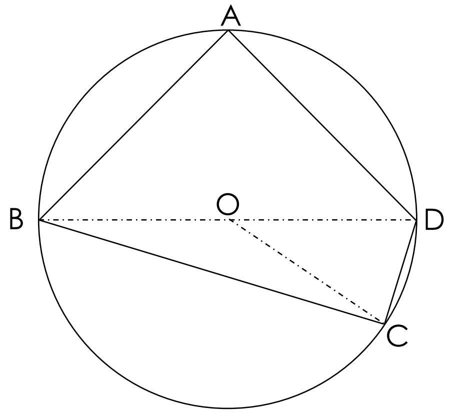
La somme de la pyramide S vaut 5a + 14b + 19c + 14d + 5e. En remplaçant a par 17, b par 44, e par 32 et S par 2'018, on obtient 19c + 14d = 1’157. Notons qu'il s'agit d'une équation diophantienne.

Reformulons cela ainsi : 14(c+d) + 5c =1'157.
Nous pouvons en déduire les solutions suivantes :

c+d	63	68	73	78
c	55	41	27	13
d	8	27	46	65

Nous obtenons **4 solutions**. Il nous reste plus qu'à répondre à la question qui est de savoir quel nombre se cache dans la case grisée.
Il peut s'agir du **162, 153, 144 ou 135**.

16. Le terrain du Père Fide



Le terrain du Père Fide est un quadrilatère dont la somme des angles opposés vaut 180°. On peut en déduire qu'il est inscriptible dans un cercle.

Les côtés BA et AD mesurent 100 m. Or l'angle $\widehat{BAD}$ vaut 90°. Cela nous permet d'appliquer le théorème de Pythagore sur le triangle BAD et d'en déduire la longueur du diamètre BD : $100\sqrt{2}$ m.
Le rayon du cercle (OB, OC et OD) vaut $50\sqrt{2}$ m.

On déduit de la donnée que l'angle $\widehat{ABC}$ vaut 60° et l'angle $\widehat{CDA}$ vaut 120°. Cela nous permet d'affirmer pour des raisons évidentes que l'angle $\widehat{OBC}$ vaut 15° et l'angle $\widehat{CDO}$ vaut 75°.

En se souvenant du fait qu'un angle au centre et un angle inscrit portant le même arc varie d'un facteur 2, nous en déduisons les mesures des angles $\widehat{COD}$ et $\widehat{BOC}$ qui valent respectivement 30° et 150°.

Finalement, nous savons que l'aire d'un triangle peut être obtenue avec la formule suivante : $A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ où b et c sont les côtés de l'angle α.

Il ne reste plus que des calculs simples à effectuer en se rappelant la valeur du sinus de 30° et 150°, à savoir : 0,5.

En calculant $\frac{100^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot (50\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (50\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2}$, on en déduit que l'aire du terrain du Père Fide vaut **7'500 m²**.

17. Successeur et double

Voir des nombres premiers n'est pas une bonne nouvelle. Nous pouvons nous douter qu'il n'y aura rien de très régulier.
Ce problème peut être résolu dans les conditions que nous souhaitons. Une liste des nombres premiers rend la tâche très aisée. Essayons de nous en passer et de trouver quelques filtres.

Nous cherchons un nombre entier supérieur à 1'009 qui est un nombre premier et dont le double moins 1 est également un nombre premier.
Ce nombre ne peut pas être pair, ni se terminer par 5 (multiple de 5), ni se terminer par 3 (car son double moins 1 sera un multiple de 5. Ce préambule terminé, attaquons le vif du sujet. La méthode n'est pas très épanouissante. N'hésitez pas à nous le faire savoir si vous trouvez une approche plus simple.

Premier nombre	Double moins 1	Commentaires
1'011		Multiple de 3
1'017		Multiple de 3
1'019	2'037	2'037 est multiple de 3
1'021	2'041	2'041 est multiple de 13
1'027	2'053	1'027 est multiple de 13
1'029		Multiple de 3
1'031	2'061	2'061 est multiple de 3
1'037	2'073	2'073 est multiple de 3
1'039	2'077	2'077 est multiple de 31 !
1'041		Multiple de 3
1'047		Multiple de 3
1'049	2'097	2'097 est multiple de 3
1'051	2'101	2'101 est multiple de 11
1'057	2'113	1'057 est multiple de 7
1'059		Multiple de 3
1'061	2'121	2'121 est multiple de 3
1'067	2'133	2'133 est multiple de 3
1'069	2'137	C'est gagné !

N'oublions pas de répondre à la question. La prochaine année sera **2'138**.

18. Somme des cubes

Les prolongements du problème peuvent être intéressants.

Il est possible de prouver que nous pouvons choisir n'importe quel nombre comme point de départ et que nous allons aboutir vers un îlot de stabilité. Il existe naturellement un nombre fini d'îlots de stabilité.

De manière plus étonnante, cette convergence est très rapide.
Par exemple, 34'628'124'905'436'282'743 converge en 9 étapes vers un îlot de stabilité, à savoir 371.
De même, 999'999'999'999'999'999'999'999'999'999 converge en 5 étapes vers 153.

Il existe également des îlots de stabilité constitué de plusieurs nombres comme la boucle 160 – 217 – 352.

Pour revenir à notre problème, nous savons que 2'101 est une réponse possible. Nous devons nous assurer qu'il n'existe pas un nombre situé entre 2'018 et 2'101 qui converge vers 1.

Un outil informatique nous confirme que ce n'est pas le cas.

La solution est 2'101.