

1. MATHIAS RECHNUNG

Wenn wir zwei zweistellige Zahlen addieren, können wir höchstens 198 erhalten ($99 + 99 = 198$). Das Herz ist also $\heartsuit = 1$ wert. Wir haben also direkt $\clubsuit = \heartsuit + \heartsuit = 2$. Nun müssen wir das $\spadesuit$ finden. Damit die Summe mehr als hundert ist, muss $\spadesuit$ größer oder gleich 5 sein. Mit $\spadesuit = 5$ ergibt sich $51 + 51 = 102$. **Die Antwort auf das Problem lautet tatsächlich 102.**

Beachten Sie : setzen wir $\spadesuit = 6$, dann ist $\diamondsuit = \clubsuit$, was nicht erlaubt ist.

2. DER DOPPELMETER

Damit das Dreieck nicht flach ist, muss es der Dreiecksungleichheit genügen. Das heisst, die Länge einer Seite darf nie länger oder gleich lang wie die Summe der beiden anderen Längen sein (im Beispiel haben wir $5 = 3 + 2$ und somit ist es kein Dreieck). Bei der Auflistung der Möglichkeiten finden wir :

$$(4, 4, 2)$$

$$(4, 3, 3)$$

Dies sind die beiden möglichen Dreiecke. Beachten Sie, dass wir z. B. nicht $(4, 2, 4)$ oder $(2, 4, 4)$ haben können, weil es nach der Umkehrung das gleiche Dreieck wie $(4, 4, 2)$ wäre.

3. DIE ZUSAMMENSETZUNG

Wir merken, dass es zwei Kategorien von Lösungen gibt, da die schwarze Fläche in einem Stück sein muss :

- Die mit den beiden grossen Seiten der vertikalen Dreiecke (was zwei Lösungen ergibt)
- Diejenigen mit mindestens zwei Dreiecken mit der grossen horizontalen Seite, und wir können ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass es die linke ist und dass das Dreieck unten liegt. Dies ergibt drei Lösungen, indem Sie die eine rechts platzieren.

4. DIE ZAHNRÄDER

Wenn sich Zahnrad A 10-mal dreht, bedeutet dies, dass 300 Zähne den Kontaktpunkt mit Zahnrad B passieren. Dieses überträgt die Bewegung auf den Kontaktpunkt mit C . Mit anderen Worten : Zahnrad C "dreht" sich ebenfalls um 300 Zähne. 300 Zähne bei einer Rate von 25 Zähnen pro Umdrehung ergeben **12 Umdrehungen** ($12 \cdot 25 = 300$).

5. MATHILDES SPIEL

Unter allen Karten können einige nur einen Nachbarn haben. Das sind die Karten 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Von diesen 7 Karten können wir also maximal zwei verwenden (eine am Anfang des Stapels und eine am Ende). Wenn wir es schaffen, alle anderen auf den Stapel zu legen, **haben wir 17 Karten**.

6. DIE MULTIPLIKATION

Ersetzen wir die leeren Felder mit Buchstaben, können wir die Rechnung schreiben als : $abc \cdot 7 = 9de$. Wir sehen, dass $a = 1$ sein muss (sonst ist das Ergebnis der Multiplikation nicht mehr dreistellig). Da $100 \cdot 7 = 700$ ist, fehlt ein Übertrag von 2, was bedeutet, dass $b = 3$ oder $b = 4$ ist. Wenn $b = 4$ ist, ergibt dies $14c \cdot 7 = 98e$. Mit den restlichen Spielsteinen kann hier keine Lösung gefunden werden, also muss $b = 3$ sein. Die Berechnung wird zu $13c \cdot 7 = 9de$, was nach Vereinfachung zu $c \cdot 7 = de - 10$ wird. Die restlichen Spielsteine sind 2, 4, 5, 6, 8.

Versuchen wir es :

- $132 \cdot 7 = 924$, unmöglich, da wir nur einen Spielstein mit einer 2 haben.
- $134 \cdot 7 = 938$, unmöglich, da wir nur einen Spielstein mit einer 3 haben.
- $135 \cdot 7 = 945$, unmöglich, da wir nur einen Spielstein mit einer 5 haben.
- $136 \cdot 7 = 952$, möglich.
- $138 \cdot 7 = 966$, da wir nur einen Spielstein mit einer 6 haben.

Die Lösung ist also die vierte, und es gibt zwei unbenutzte Spielsteine, **4 und 8**.

7. DAS DREIECK DES JAHRES

Beim Summieren der drei "stehenden" Kanten addieren wir jeden Kreis einmal, außer dem oberen, den wir dreimal addieren (die liegende Kante hat keine Kreise, die nicht auch in den stehenden vorkommen). Da die Summe auf den Linien 21 ist, erhalten wir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 2x = 3 \cdot 21$, wobei x der Wert des oberen Kreises ist. Lösen wir nach x , finden wir $2x = 63 - 45$ und damit $x = 9$. Das Ausfüllen der anderen Kreise ist nun einfacher.

8. DAS GEBURTSDATUM

Ein Datum im Jahr 2020 hat zwangsläufig die Form $xx.0x.20$, oder $xx.1x.20$. Im ersten Fall kann die 2 ganz vorne stehen : $2x.0x.20$, wir wissen $x \neq 0$; 2. Dies ergibt 8 Daten. Steht die 2 an zweiter Stelle, dann gibt es nur eine Lösung : $12.01.20$. Total also 9 Daten.

Steht die 2 an dritter Stelle (Februar), dann geht nur das Datum $11.02.20$.

Wenn wir nun die Situation $xx.1x.20$ betrachten, dann kann die Ziffer 2 an drei verschiedenen Orten stehen, und es gibt jeweils zwei Lösungen, also zusammen 6 Daten.

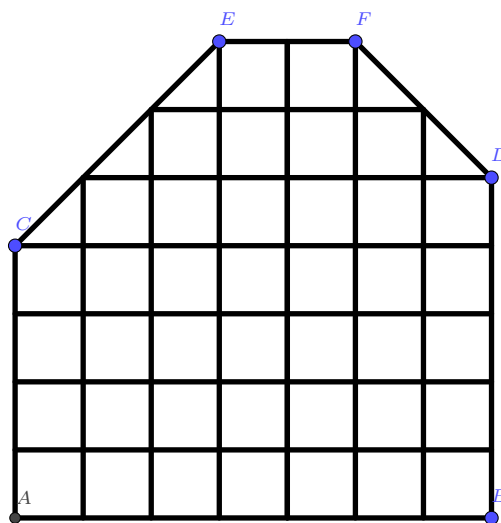
Insgesamt haben wir $9+1+6=16$ Daten.

9. DIE SCHWARZEN FELDER

In unserem Raster sei x die Anzahl der Spalten mit 3 schwarzen Zellen, und y die Anzahl der Spalten mit 2 schwarzen Zellen. Wir haben also die Gleichungen : $\begin{cases} 4 + x + y = 15 \text{ (nombre de colonnes)} \\ 4 + 3x + 2y = 32 \text{ (nombre de cases noires)} \end{cases}$
Lösen wir die Gleichungen auf, finden wir $x = 6$ und $y = 5$. **Die Antwort ist also 6 Spalten.**

10. PLÄTTCHEN VERLEGEN

Der erste Schritt zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, die Position des Punktes E in der Abbildung unten zu finden. Da alle Winkel 135° sind, bedeutet dies, dass die Steigung immer -1 oder +1 ist. Nach einigen Berechnungen finden wir, dass E 210 cm von der Basis, 90 cm (horizontal) von links und 120 von rechts entfernt ist. Tatsächlich haben wir $120 + 90 = 210$ (Höhe auf der linken Seite), $150 + 60 = 210$ (Höhe auf der rechten Seite) und $90 + 60 + 60 = 210$ (horizontaler Abstand). Da alle Längen ein Vielfaches von 30 cm sind, können wir von dort aus den Zuschnitt wie in der Abbildung vornehmen :



Es gibt 40 vollständige Quadrate und 5 halbe Quadrate. **Dies ergibt 43 Platten.**

11. DER TIERPARK

Erste Analyse der Aussage : Es werden mehrere Kamele, mehrere Dromedare und mehrere Esel erwähnt. Dies bedeutet, dass es mindestens 2 von jedem gibt.

Da alle Tiere 4 Beine haben und Mathias 60 gezählt hat, bedeutet das, dass es insgesamt 15 Tiere sind. Schauen wir uns die Höcker an

1. Wenn es 2 Kamele, d.h. 4 Höcker gibt, muss es 13 Dromedare geben, also 0 Esel. Unmöglich
2. Wenn es 3 Kamele, d.h. 6 Höcker gibt, muss es 11 Dromedare geben, also 1 Esel. Unmöglich
3. Wenn es 5 Kamele, d.h. 10 Höcker gibt, muss es 7 Dromedare geben, also 3 Esel. Möglich
4. Wenn es 6 Kamele, d.h. 12 Höcker gibt, muss es 5 Dromedare geben, also 4 Esel. Möglich
5. Wenn es 7 Kamele, d.h. 14 Höcker gibt, muss es 3 Dromedare und somit 5 Esel geben. Möglich
6. Wenn es 8 Kamele, d.h. 16 Höcker gibt, muss es 1 Dromedar geben. Unmöglich

Es gibt also 4 Lösungen : 3, 5, 7, und 9

12. EIN SPEZIELLES JAHR

A muss gleich 1 sein. Beweis :

$$BCD + BC + B < 999 + 99 + 9 = 1107 < 2021 < 2220 \leq 2BCD + 2BC + 2B.$$

(links ist $A = 0$, rechts ist $A = 2$)

Setzt man $A = 1$ und vereinfacht die Gleichung, erhält man

$$BCD + BC + B = 2021 - 1110 = 911.$$

B muss dann gleich 8 sein, weil

$$7CD + 7C + 7 < 799 + 79 + 7 = 885 < 911 < 9CD + 9C + 9.$$

Durch Ersetzen von $B = 8$ und Vereinfachen der Gleichung erhalten wir

$$CD + C = 911 - 888 = 23.$$

Die einzige Lösung ist $C = 2$ und $D = 1$. **Wir schreiben also das Jahr 1821.**

13. DAS SCHMUCKSTÜCK

Sei x die Seitenlänge der quadratischen Seite, und y die andere Seitenlänge. Dann ist das Volumen durch die Formel $V = x^2y$ und die Gesamtfläche durch $S = 2x^2 + 4xy$ gegeben. Durch Gleichsetzen und Vereinfachen finden wir (da wir wissen, dass x nicht Null ist, können wir durch x dividieren) :

$$x^2y = 2x^2 + 4xy$$

$$xy = 2x + 4y$$

Letzteres erzwingt $y > 2$ und $x > 4$ ($xy > 2x$ bzw. $xy > 4y$). Durch Iteration finden wir die Lösungen :

1. Wenn $y = 3$, dann $x = 12$.
2. Wenn $y = 4$, dann $x = 8$.
3. Wenn $y = 5$, $x = 20/3$. Unmöglich
4. Wenn $y = 6$, $x = 6$. Unmöglich, weil die nicht-quadratische Fläche quadratisch wäre.
5. Wenn $x = 5$, dann $y = 10$.

Damit erhalten wir die drei Lösungen : 5, 8, 12.

14. LÜCKENFAFTE OPERATION

Sei x die addierte Zahl. Wir müssen $(12+x) \cdot (21+x) = 2021+x$ haben. Lassen Sie uns die Multiplikation durchführen :

$$252 + 33x + x^2 = 2021 + x.$$

Das heisst

$$x^2 + 32x - 1769 = 0.$$

Mit Hilfe der Formel der Diskriminante konnten wir die beiden Lösungen finden. Um schneller voranzukommen, können wir erkennen, dass wenn $-a$ und $-b$ die Lösungen sind, dann ist $ab = -1769$ und $a + b = 32$ (Trinomische Formel, auch Summenprodukt genannt).

Wenn wir uns die Einheiten ansehen, erkennen wir schnell, dass eine der Zahlen die Form ...1 und die andere die Form ...9 haben wird. Durch schnelle Berechnung der Dimension kommt man schnell darauf, dass es sicherlich 61 und -29 sein werden. In der Tat, $61 \cdot -29 = -1830 + 61 = 1769$ und $61 - 29 = 32$.

Die beiden Lösungen sind also 61 und -29.

15. EIN ZIMMER IN DACHGESCHOSS

Der erste Schritt besteht darin, die Höhe zu ermitteln. Hier sind zwei Methoden, dies zu tun :

Methode 1 (über Fläche)

Der Flächeninhalt der Figur ist durch $\frac{7 \cdot h}{2}$, aber auch durch die Reiherformel gegeben ($A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$) wobei p der halbe Umfang und a, b, c die Seiten des Dreiecks sind. Hier ist der halbe Umfang $21/2$, und somit ist die Fläche gegeben durch

$$A = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{2}} = \frac{7 \cdot 12}{4}.$$

Die Höhe ist also $h = 12/2 = 6m$.

Methode 2 (Pythagoreische Tripel) Wenn wir alle Seiten mit 2 multiplizieren (um die Dezimalzahlen verschwinden zu lassen), finden wir 13, 14, 15. 13 ist die Hypotenuse eines pythagoreischen Triplets (13,12,5) und 15 ist ebenfalls (15,12,9). Da $9 + 5 = 14$ ist, beträgt die Höhe $12m$ und trennt die Basis in ein $9m$ und ein $5m$ Stück.

Weiter : Der Einfachheit halber verdoppeln wir alle Längen wie in Methode 2. Setzen wir x für die Seite des Quadrats. Wendet man den Satz von Thales auf das Dreieck über dem Quadrat und das gesamte Dreieck an, so erhält man $\frac{x}{12-x} = \frac{14}{12}$ (Basis geteilt durch Höhe). Durch Multiplikation mit den Nennern erhalten wir

$$12x = 14 \cdot (12 - x),$$

d.h.

$$26x = 168.$$

Es bleibt "nur" noch, diese Division mit der Hand durchzuführen, ohne dabei zu vergessen, das Ganze durch 2 zu teilen ! Die Berechnung gerundet auf den nächsten Zentimeter, d.h. auf zwei Nachkommastellen, **ergibt 3,23.**

16. DIE VORZEICHENPYRAMIDE

Die wesentliche Beobachtung, um die Konstruktion der Antwort zu verstehen, ist, dass, wenn Sie alle Vorzeichen einer Linie umkehren, der Rest der Pyramide (oben) nicht verändert wird. Nimmt man das gegebene Beispiel, so ist der Rest der Pyramide identisch, wenn man anstelle der letzten Zeile $++---$ setzt. Wenn man die Pyramide von oben aufbaut, stellt man schnell fest, dass die rekursive Folge $---++---++\dots$ ist. So können wir die Sequenz vollständig vom Startpunkt aus aufbauen.

1. Wenn das Zeichen ganz oben ein $+$ ist.

In diesem Fall ist die Anzahl der $-$ pro Stufe durch die Folge gegeben : $(0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, \dots)$. Wenn Sie zu Zeile 21 gehen und die Anzahl der $-$ zusammenzählen, ergibt sich $S = 3 \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) + 14 + 14 = 154$.

2. Wenn das Zeichen ganz oben ein $-$ ist

In diesem Fall ist die Anzahl der $-$ pro Etage durch die Folge gegeben : $(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, \dots)$. Wenn Sie zu Zeile 21 gehen und die Anzahl der $-$ addieren, finden Sie $S = (1 + 2 + \dots + 14) + (1 + 3 + 5 + \dots + 13) = 154$.

In beiden Fällen ist die maximale Anzahl von $-$ **154**.

17. SO VIELE DREIECKE

Seien α , β und γ die Winkel der Dreiecke, mit $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 1$. Dann können wir "wichtige" Situationen identifizieren : Wenn α abnimmt, erhöht dies die Anzahl der möglichen Dreiecke, bis $\alpha < 90$ ist. An diesem Punkt kann es keine Winkel mit kleinem Grad mehr geben (1 für $\alpha = 89$, 3 für $\alpha = 88$, usw.). Das macht es so, dass es "immer weniger" Möglichkeiten gibt, wenn α unter 90 Grad sinkt.

Wenn wir die Dreiecke in Abhängigkeit von α zählen :

- Wenn $\alpha = 188$, dann haben wir ein $(188, 1, 1)$ Dreieck.
- Wenn $\alpha = 187$, dann haben wir ein $(187, 2, 1)$ Dreieck.
- Wenn $\alpha = 186$ ist, dann haben wir zwei Dreiecke $(186, 3, 1)$ und $(186, 2, 2)$.
- usw...
- Wenn $\alpha = 91$ ist, dann gibt es 44 Dreiecke (von $(91, 88, 1)$ bis $(91, 45, 44)$).
- Wenn $\alpha = 90$ ist, dann gibt es 45 Dreiecke (von $(90, 89, 1)$ bis $(90, 45, 45)$).

Bislang haben wir bereits gezählt

$$\sum_{i=1}^{44} i + \sum_{i=1}^{45} i = \frac{44 * 45}{2} + \frac{45 * 46}{2} = 45^2 = 2025 \text{ triangles,}$$

Dreiecke die erste Summe ist, wenn α ungerade ist, und die zweite, wenn es gerade ist.

Die Abfolge der Winkel impliziert eine schnelle Abnahme der Möglichkeiten :

- Wenn $\alpha = 89$ ist, dann gibt es 44 Dreiecke (von $(89, 89, 2)$ bis $(89, 46, 45)$).
- Wenn $\alpha = 88$ ist, dann gibt es 43 Dreiecke (von $(88, 88, 4)$ bis $(88, 46, 46)$).
- Wenn $\alpha = 87$ ist, dann gibt es 41 Dreiecke (von $(87, 87, 6)$ bis $(87, 47, 46)$).
- Wenn $\alpha = 86$ ist, gibt es 40 Dreiecke.
- usw.....
- Wenn $\alpha = 61$ ist, dann gibt es 2 Dreiecke (von $(61, 61, 58)$ bis $(61, 60, 59)$).
- Wenn $\alpha = 61$ ist, dann gibt es nur ein Dreieck $(60, 60, 60)$.

Wir sehen, dass wir alle möglichen Anzahlen von Dreiecken von 1 bis 44 haben, außer den Vielfachen von 3. Die Summe ergibt

$$\sum_{i=1}^{44} i - \sum_{i=1}^{14} 3i = \frac{44 * 45}{2} - 3 * \frac{14 * 15}{2} = 22 * 45 - 7 * 45 = 15 * 45 = 675.$$

Wir haben also insgesamt **2700 Dreiecke**.

18. JACK TSCHAINS JAGDGEBIET

Da sich die Diagonalen senkrecht schneiden, ist die Fläche natürlich maximal, wenn die beiden Diagonalen die gleiche Länge haben. Mit anderen Worten, die Suche nach einem Maximum ist in den meisten Fällen die Suche nach einer symmetrischen Situation. Unser Sehnenviereck wird symmetrisch sein, wenn es die Form eines gleichschenkligen Trapezes hat. Damit sich die Diagonalen senkrecht schneiden, muss die Summe der beiden gleichen Seiten größer sein als die Summe der anderen beiden Seiten (Begründung durch Dreiecksungleichung oder Pythagoras). Mit anderen Worten, wir haben zwei Seiten der Länge 225 dam, und zwei andere Seiten der Länge x und $360 - x$.

Die Länge der Diagonale ist also $360/\sqrt{2}$. Tatsächlich bildet ein Ende der Diagonale ein gleichschenkliges rechtwinkliges Rechteck mit der Hypotenuse x , und das andere eines mit der Hypotenuse $360 - x$. Diese

beiden Teile messen also $x/\sqrt{2}$ und $(360-x)/\sqrt{2}$ Die Fläche des Feldes ist also gleich $\frac{(360/\sqrt{2})^2}{2} = 360^2/4$.

Wir haben aber auch die Formel $ef = ac + bd$, wobei a, b, c, d die Längen der Seiten und e, f die Längen der Diagonalen sind. In unserem Fall ergibt dies

$$360^2/2 = 225^2 + x(360 - x),$$

oder wieder

$$x^2 - 360x + 14175 = 0.$$

Die Faktorisierung von 14175 ist gegeben durch $14175 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Die Faktorisierung des Polynoms ist dann gegeben durch

$$(x - 45)(x - 315) = 0.$$

Die Längen der verbleibenden Seiten sind also 45 und 315. **Der längste Abstand zwischen zwei Hütten beträgt also 315.**