

1. *L'addition de Mathias*

Si on somme deux nombre à 2 chiffres, on peut au plus obtenir 198 ($99 + 99 = 198$). Le coeur vaut donc $\heartsuit = 1$. On a donc directement $\clubsuit = \heartsuit + \heartsuit = 2$. Il reste à trouver les $\spadesuit$. Pour que la somme donne plus de cent, il faut que $\spadesuit$ soit plus grand ou égal à 5. Avec $\spadesuit = 5$, on trouve $51 + 51 = 102$. **La réponse au problème est bien 102.**

À noter qu'en choisissant $\spadesuit = 6$, on trouve que $\diamondsuit = \clubsuit$ ce qui est interdit.

2. *Le double-mètre*

Pour que le triangle ne soit pas plat, il faut qu'il vérifie l'égalité triangulaire. C'est à dire que la longueur d'un côté ne doit jamais être plus long ou de même longueur que la somme des deux autres longueurs (Dans l'exemple, on a $5 = 3 + 2$ et donc ce n'est pas un triangle). En énumérant les possibilités, on trouve :

$$(4, 4, 2)$$

$$(4, 3, 3)$$

Ce sont les deux triangles possibles. Notons qu'il ne faut pas compter, par exemple, $(4, 2, 4)$ ou $(2, 4, 4)$ car ce serait le même triangle que $(4, 4, 2)$ après retournement.

3. *Assemblages*

On remarque que comme la surface noire doit être d'un seul tenant, il y a deux catégories de solutions :

- Celles avec les deux grand côtés des triangles verticaux (qui donne deux solutions)
- Celles avec au moins des deux triangles avec le grand côté horizontal, et on peut supposer sans perte de généralité que c'est celui de gauche et que le triangle est en bas. Cela donne trois solutions en plaçant celui de droite.

4. Engrenages

Si la roue A tourne 10 tours, cela signifie qu'il y a 300 dents qui vont passer par le point de contact avec la roue B . Celle-ci va transmettre le mouvement au point de contact avec C . Autrement dit, la roue C va aussi "tourner" de 300 dents. 300 dents à coups de 25 dents par tours, **cela donne 12 tours** ($12 \cdot 25 = 300$).

5. Le jeu de Mathilde

Parmi toutes les cartes, certaines ne peuvent avoir qu'un seul voisin. Il s'agit des cartes n°3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ainsi, parmi ces 7 cartes, nous pourrions en utiliser au maximum deux (une au début de la pile, et une à la fin). En arrivant à mettre toutes les autres, **cela donne 17 cartes**.

6. Multiplication à compléter

En utilisant des lettres, on a $abc \cdot 7 = 9de$. Le premier résultat est que $a = 1$ (sinon on aura le résultat de la multiplication sera au moins de 1400). Comme $100 \cdot 7 = 700$, il manque une retenue de 2. Cela signifie que $b = 3$ ou $b = 4$. Si $b = 4$, cela donne $14c \cdot 7 = 98e$. Avec les jetons restant, cela est impossible. Donc $b = 3$. Le calcul devient $13c \cdot 7 = 9de$ qui, après simplification devient $c \cdot 7 = de - 10$. Les jetons restants sont 2, 4, 5, 6, 8.

Essayons :

- $132 \cdot 7 = 924$, impossible car deux fois le jeton 2.
- $134 \cdot 7 = 938$, impossible car deux fois le jeton 3.
- $135 \cdot 7 = 945$, impossible car deux fois le jeton 5.
- $136 \cdot 7 = 952$, possible.
- $138 \cdot 7 = 966$, impossible car deux fois le jeton 6.

La solution est donc la quatrième, et il y a donc deux jetons non utilisés, **le 4 et le 8**.

7. Le triangle de l'année

En sommant les trois arrêtes "verticales", on additionne une fois chaque cercle, sauf celui du haut qu'on additionne trois fois. Comme la somme des alignements est 21, on obtient $1+2+3+4+5+6+7+8+9+2x = 3 \cdot 21$, où x est la valeur du cercle du haut. En résolvant, on trouve $2x = 63 - 45$ et donc $x = 9$. Le remplissage des autres cercles devient plus facile.

8. Date d'anniversaire

Une date de l'année 2020 est forcément de la forme $- -0-.20$, ou $-1-.20$. Regardons la première situation : Dans le cas où le deuxième 2 est en première position, on aura tous les $2x.0x.20$, avec $x \neq 0$; 2. Cela donne 8 dates.

Dans le cas où le deuxième 2 est en deuxième position ($x2.0x.20$), il n'y a que la solution 12.01.20. Cela fait donc une neuvième possibilité.

Si maintenant on est au mois de février (2 en quatrième position), il y a que la date 11.02.20 qui donne une solution, donc une possibilité.

Si maintenant on regarde la situation $xx.1x.20$, il nous reste à placer une fois chaque nombres (0, 1, 2) à la place des x . Cela donne 6 possibilités.

En tout, on a $9 + 1 + 6 = 16$ dates.

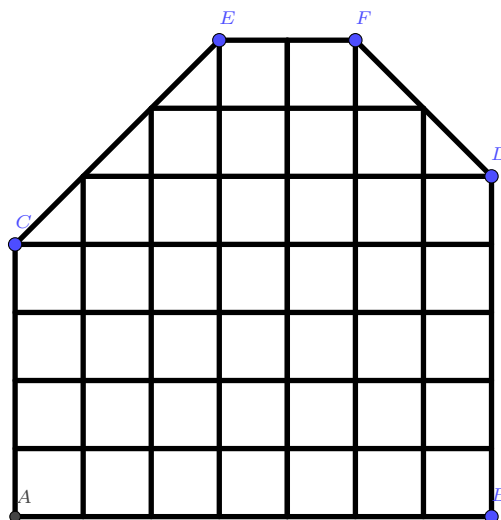
9. Cases noires

Dans notre grille, fixons x le nombre de colonnes ayant 3 cases noires, et y le nombre de colonnes ayant 2 cases noires. On a donc comme équations :
$$\begin{cases} 4 + x + y = 15 & (\text{nombre de colonnes}) \\ 4 + 3x + 2y = 32 & (\text{nombre de cases noires}) \end{cases}$$

En résolvant, on trouve $x = 6$ et $y = 5$. **La réponse est donc 6 colonnes.**

10. Carrelage

La première étape pour résoudre cet exercice est de réussir à trouver la position du point E dans la figure ci-dessous. Comme tous les angles sont de 135° , cela signifie que la pente est toujours de plus ou moins 1. Après quelques calculs, on trouve que E est à 210 cm de la base, 90 cm (horizontalement) de la gauche et 120 de la droite. En effet on a bien $120 + 90 = 210$ (hauteur à gauche), $150 + 60 = 210$ (hauteur à droite) et $90 + 60 + 60 = 210$ (distance horizontale). A partir de là, comme toutes les longueurs sont des multiples de 30 cm, on peut faire le découpage comme sur la figure :



On y trouve 40 carrés complets, et 5 demi-carrés. Cela donne donc **43 carrelages**.

11. Le parc animalier

Première analyse de l'énoncé : il est mentionné plusieurs chameaux, plusieurs dromadaires et plusieurs ânes. Cela signifie qu'il y en a au moins 2 de chaque.

Comme tous les animaux ont 4 pattes, et que Mathias en a compté 60, cela signifie qu'il y a en tout 15 animaux. Regardons donc les bosses

1. Si il y a 2 chameaux, soit 4 bosses, il faut qu'il y aie 13 dromadaires, et donc 0 ânes. Impossible
2. Si il y a 3 chameaux, soit 6 bosses, il faut qu'il y aie 11 dromadaires, et donc 1 âne. Impossible
3. Si il y a 4 chameaux, soit 8 bosses, il faut qu'il y aie 9 dromadaires, et donc 2 ânes. Possible
4. Si il y a 5 chameaux, soit 10 bosses, il faut qu'il y aie 7 dromadaires, et donc 3 ânes. Possible
5. Si il y a 6 chameaux, soit 12 bosses, il faut qu'il y aie 5 dromadaires, et donc 4 ânes. Possible
6. Si il y a 7 chameaux, soit 14 bosses, il faut qu'il y aie 3 dromadaires, et donc 5 ânes. Possible
7. Si il y a 8 chameaux, soit 16 bosses, il faut qu'il y aie 1 dromadaire. Impossible

Il y a donc 4 solutions : 3, 5, 7, et 9

12. Une drôle d'année

Pour commencer, A est obligatoirement égal à 1. En effet,

$$BCD + BC + B < 999 + 99 + 9 = 1107 < 2021 < 2220 \leq 2BCD + 2BC + 2B.$$

En remplaçant $A = 1$ et en simplifiant l'équation on trouve

$$BCD + BC + B = 2021 - 1110 = 911.$$

À nouveau, B est obligatoirement égal à 8 car

$$7CD + 7C + 7 < 799 + 79 + 7 = 885 < 911 < 9CD + 9C + 9.$$

En remplaçant $B = 8$ et en simplifiant l'équation on trouve

$$CD + C = 911 - 888 = 23.$$

La seule solution est $C = 2$ et $D = 1$. **L'année est donc l'année 1821.**

13. Le bijou

Soit x la dimension de la face carrée, et y l'autre dimension. Alors le volume est donné par la formule $V = x^2y$ et la surface totale est donnée par $S = 2x^2 + 4xy$. En égalisant et en simplifiant on trouve (sachant que x est non nul, on peut diviser par x) :

$$x^2y = 2x^2 + 4xy$$

$$xy = 2x + 4y$$

Cette dernière oblige $y > 2$ et $x > 4$ ($xy > 2x$ respectivement $xy > 4y$). Par itération, on trouve les solutions :

1. Si $y = 3$, $x = 12$.
2. Si $y = 4$, $x = 8$.
3. Si $y = 5$, $x = 20/3$. Impossible
4. Si $y = 6$, $x = 6$. Impossible car la face non carré serait carré.
5. Si $x = 5$, $y = 10$.

Cela nous donne donc les **trois solutions : 5, 8, 12.**

14. Opération à restaurer

Soit x le nombre ajouté. On doit avoir $(12 + x) \cdot (21 + x) = 2021 + x$. Effectuons la multiplication :

$$252 + 33x + x^2 = 2021 + x.$$

Soit encore

$$x^2 + 32x - 1769 = 0.$$

En utilisant la formule du discriminant, nous pourrions trouver les deux solutions. Pour aller plus vite, on peut réaliser que si $-a$ et $-b$ sont les solutions, alors $ab = -1769$ et $a + b = 32$ (formule du trinôme, également appelée somme-produit). En regardant les unités, on réalise rapidement qu'un des nombres sera de la forme $\dots 1$ et l'autre de la forme $\dots 9$. Par calcul rapide de dimension, il nous vient vite que ce sera certainement 61 et -29. En effet, $61 \cdot (-29) = -1830 + 61 = -1769$ et $61 - 29 = 32$.

Les deux solutions sont donc 61 et -29.

15. Une pièce sous le toit

La première étape est de trouver la hauteur. Voici deux méthodes pour y arriver :

Méthode 1 (utilisation de l'aire)

L'aire de la figure est donnée par $\frac{7 \cdot h}{2}$ mais aussi par la formule de Héron ($A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où p est le demi-périmètre et a, b, c les côtés du triangle. Ici le demi périmètre vaut $21/2$, et donc l'aire est donnée par

$$A = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{2}} = \frac{7 \cdot 12}{4}.$$

La hauteur vaut donc $h = 12/2 = 6m$.

Méthode 2 (Triplets Pythagoriciens)

Si on multiplie tous les côtés par 2 (pour faire disparaître les nombres à virgule), on trouve 13, 14, 15. Hors, 13 est l'hypoténuse d'un triplet pythagoricien (13,12,5) et 15 aussi (15,12,9). Comme $9 + 5 = 14$, la hauteur vaut bien $12m$ et sépare la base en un bout de $9m$ et l'autre de $5m$.

Suite : Par soucis de simplicité, doublons toutes les mesures comme dans la Méthode 2. Soit x le côté du carré. En appliquant le théorème de Thalès sur le triangle au dessus du carré et le triangle total, on a $\frac{x}{12-x} = \frac{14}{12}$ (base divisée par hauteur). En multipliant par les dénominateurs on trouve

$$12x = 14 \cdot (12 - x),$$

soit encore

$$26x = 168.$$

Il ne reste "plus qu'à" effectuer cette division à la main, sans oublier de diviser le tout par 2! Le calcul **42/13** arrondie au centimètre le plus proche, soit à deux décimales, **donne 3,23**.

16. La pyramide des signes

Le constat essentiel afin de comprendre la construction de la réponse est que, si on inverse l'ensemble des signes d'une ligne, le reste de la pyramide (au-dessus) n'est pas modifié. En effet, en prenant l'exemple donné, si à la place de la dernière ligne vous mettez $+$ $+$ $-$ $-$ $-$, le reste de la pyramide est identique. En construisant la pyramide à partir du sommet, on observe rapidement que la séquence récurant sera $-$ $-$ $+$ $-$ $-$ $+$ $-$ $-$ $+$ On peut donc entièrement construire la séquence à partir du sommet de départ.

1. Si le sommet est un $+$

Dans ce cas, le nombre de $-$ par étage est donné par la séquence : $(0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, \dots)$. En allant à la ligne 21 et en sommant le nombre de $-$, on trouve $S = 3 \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) + 14 + 14 = 154$.

2. Si le sommet est un $-$

Dans ce cas, le nombre de $-$ par étage est donné par la séquence : $(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, \dots)$. En allant à la ligne 21 et en sommant le nombre de $-$, on trouve $S = (1 + 2 + \dots + 14) + (1 + 3 + 5 + \dots + 13) = 154$.

Dans les deux cas, le nombre maximum de $-$ est **154**.

17.

Soit α , β et γ les angles du triangles, avec $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 1$. Alors on peut identifier des situations "importantes" : Si α diminue, cela augmente le nombre de triangles possibles jusqu'à ce que $\alpha < 90$. A ce moment, il ne peut plus y avoir d'angle de degré petit (1 pour $\alpha = 89$, 3 pour $\alpha = 88$, etc). Cela fait qu'il y aura "de moins en moins" de possibilités quand α diminuera en dessous de 90 degrés.

Si on compte les triangles en fonction de α :

- Si $\alpha = 188$, alors on a un triangle (188, 1, 1).
- Si $\alpha = 187$, alors on a un triangle (187, 2, 1).
- Si $\alpha = 186$, alors on a deux triangles (186, 3, 1) et (186, 2, 2).
- etc...
- Si $\alpha = 91$, alors il y a 44 triangles (de (91, 88, 1) à (91, 45, 44)).
- Si $\alpha = 90$, alors il y a 45 triangles (de (90, 89, 1) à (90, 45, 45)).

Jusqu'ici, on a déjà compté

$$\sum_{i=1}^{44} i + \sum_{i=1}^{45} i = \frac{44 * 45}{2} + \frac{45 * 46}{2} = 45^2 = 2025 \text{ triangles,}$$

la première somme étant quand α est impair, et la deuxième quand il est pair.

La suite des angles implique une diminution rapide des possibilités :

- Si $\alpha = 89$, alors il y a 44 triangles (de (89, 89, 2) à (89, 46, 45)).
- Si $\alpha = 88$, alors il y a 43 triangles (de (88, 88, 4) à (88, 46, 46)).
- Si $\alpha = 87$, alors il y a 41 triangles (de (87, 87, 6) à (87, 47, 46)).
- Si $\alpha = 86$, alors il y a 40 triangles.
- Etc...
- Si $\alpha = 61$, alors il y a 2 triangles (de (61, 61, 58) à (61, 60, 59)).
- Si $\alpha = 60$, alors il y a qu'un seul triangle (60, 60, 60).

On voit qu'on a tous les nombres de triangles possibles de 1 à 44, sauf les multiples de 3. La somme donne donc

$$\sum_{i=1}^{44} i - \sum_{i=1}^{14} 3i = \frac{44 * 45}{2} - 3 * \frac{14 * 15}{2} = 22 * 45 - 7 * 45 = 15 * 45 = 675.$$

On a donc au total **2700 triangles**.

18. Le partage du jardin

Étant donné que les diagonales se coupent perpendiculairement, l'aire sera maximale, certainement, lorsque les deux diagonales ont la même longueur. Autrement dit, chercher un maximal est, dans la majeure partie des cas, chercher une situation symétrique. Notre terrain inscriptible sera symétrique si il prend la forme d'un trapèze isocèle. Pour que les diagonales se coupent perpendiculairement, il faut que la somme des deux côtés égaux soit plus grande que celle des deux autres côtés (justification par inégalité triangulaire, ou pythagore). Autrement dit, nous aurons deux côtés de longueur 225 décimètres, et deux autres côtés de longueur x et $360 - x$.

La longueur de la diagonale sera donc de $360/\sqrt{2}$. En effet, le point d'intersection des diagonales relié à chacune des bases forme deux triangles rectangles isocèles d'hypoténuse x , et $360 - x$. La diagonale est donc coupée en deux parties mesurant $x/\sqrt{2}$ et $(360 - x)/\sqrt{2}$. L'aire du champ est donc égale à $\frac{(360/\sqrt{2})^2}{2} = 360^2/4$. Mais on a aussi la formule $ef = ac + bd$ (car c'est un quadrilatère inscrit), où a, b, c, d sont les longueurs des côtés et e, f celles des diagonales. Dans notre cas cela donne

$$360^2/2 = 225^2 + x(360 - x),$$

soit encore

$$x^2 - 360x + 14175 = 0.$$

La factorisation de 14175 est donnée par $14175 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. La factorisation du polynôme est donc donnée par

$$(x - 45)(x - 315) = 0.$$

Les dimensions des côtés restants sont donc 45 et 315. **La distance la plus longue séparant deux cabanes est donc 315.**