

Online World Math Contest

Zweite Durchführung, 2022

Bocconi-Universität - Pristem-Zentrum - Mailand

24. September 2022

1 Mathematische Geysire

Im Yellowstone-Park gibt es zwei Geysire, die sehr regelmässig Dampf ausstossen: der erste genau alle 7 Minuten, der zweite alle 9 Minuten.

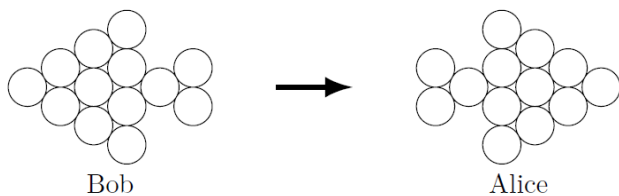
Gestern um 20:22 Uhr stiessen die beiden Geysire eine Dampffontäne aus.

Zu welchem Zeitpunkt, zum ersten Mal nach 20.22 Uhr, geschah dies erneut?

Geben Sie die Antwort an, indem Sie zwei Ziffern für die Stunden gefolgt von zwei Ziffern für die Minuten, getrennt durch ":", verwenden (z. B. 03:14).

2 Gegen den Strom fischen

Mit 13 gleichen Münzen erhält Bob einen kleinen Fisch (links im Bild), aber er merkt, dass der Fisch gegen die Strömung schwimmt. Alice verschiebt einige der Münzen von Bobs Fisch und erhält denselben Fisch (rechts im Bild), aber er schwimmt in die richtige Richtung.



Wie viele Münzen muss Alice mindestens bewegen, um ihren Fisch zu bekommen?

3 Die Zeit 2022

Bob hat einen digitalen Wecker, der zwei Ziffern für die Stunden (00, 01, 02, ..., 23), zwei Ziffern für die Minuten (00, 01, 02, ..., 59) und zwei Ziffern für die Sekunden (00, 01, 02, ..., 59) verwendet. Zu Beginn dieses Wettbewerbs zeigt der Wecker 140000 an.

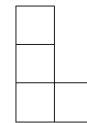
Vor dem Mittagessen wirft Bob einen Blick auf seinen Wecker, er zeigt 120220 an, später zeigt der Wecker irgendwann 152022 und zur Abendessenszeit 202230 an.

Bob stellt fest, dass die angezeigte Uhrzeit in allen drei Fällen die vier Ziffern des aktuellen Jahres enthält, und zwar in der richtigen Reihenfolge und direkt nebeneinander, wenn auch an unterschiedlichen Positionen.

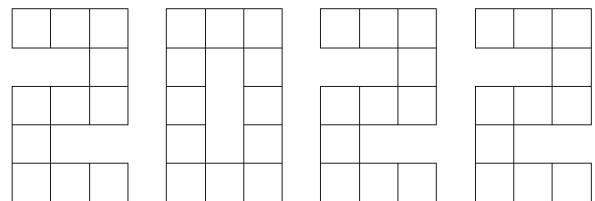
Wie oft tritt dieses Phänomen in 24 Stunden auf?

4 2022 in Quadraten und Rechtecken

In der folgenden L-förmigen Abbildung können acht Rechtecke mit Seitenlänge 1 gesehen werden: vier Quadrate mit je einem Quadrat, drei Rechtecke mit den Massen 1×2 und ein vertikales Rechteck mit den Massen 1×3 .



Betrachten Sie die folgende Abbildung:



Wie viele Rechtecke sind sichtbar?

5 Dreieckstage

Ein Tag wird *dreieckig* genannt, wenn es möglich ist, ein (nicht flaches) Dreieck zu konstruieren, dessen Seitenlängen die drei ganzen Zahlen sind, die sein Datum bilden: der Tag, der Monat und die letzten beiden Ziffern des Jahres.

Heute, (24, 9, 22), ist ein *Dreieckstag*, weil es ein Dreieck mit den Seiten 24, 9 und 22 gibt. Der nächste Samstag, (1, 10, 22), ist kein *Dreieckstag*, weil es kein *Dreieck* mit den Seiten 1, 10 und 22 gibt.

Wie viele Dreieckstage gibt es dieses Jahr im September?

6 Die ganze Pyramide

Alice hat eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche geschenkt bekommen, die ein Volumen von 24 cm^3 hat. Die Längen der Seiten der Grundfläche und der Höhe sind ganze Zahlen in cm.

Wie gross ist die minimale und die maximale Höhe von Alices Pyramide in cm?

Geben Sie die beiden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an, getrennt durch ein Komma.

7 Polyglottes Kryptogramm

Lösen Sie das folgendene Kryptogramm, indem Sie jeden Buchstaben durch eine Ziffer zwischen 1 und 9 ersetzen, so dass gleiche Buchstaben gleichen Ziffern und unterschiedliche Buchstaben unterschiedlichen Ziffern entsprechen. Das Schriftzeichen in der zweiten Zeile ist die Ziffer "0".

(2)	D	E	U	X	+	(deutsch)
(0)				0	+	(digital)
(2)		D	U	E	+	(italienisch)
(2)			I	I	=	(römisch)
	2	0	2	2		

Welcher Zahl entspricht das Wort IDEE?

8 Die schlafende Schildkröte

Die Schildkröte Tortuga muss eine Treppe hinaufsteigen. An einem sonnigen Tag schafft sie es, drei Stufen zu erklimmen, aber wenn es regnet, schafft sie nur zwei. In der Nacht jedoch schläft sie ein und rutscht immer eine Stufe runter.

Ihre Leistung kann durch eine Folge von Zahlen dargestellt werden, von denen jede ihre Position (die Stufe, die sie erreicht hat) am Ende jeder Bewegung nach oben oder unten angibt und die mit der Gesamtzahl der Stufen auf der Treppe endet.

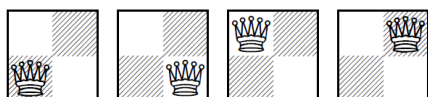
Tortuga muss zunächst eine Treppe mit nur drei Stufen bewältigen. Sie weiss, dass alles vom Wetter abhängt, und rechnet aus, dass sie dies auf zwei verschiedene Arten tun kann. Im ersten Fall, wenn der erste Tag sonnig ist, erreicht sie den Gipfel noch am selben Tag: Ihre Route ist mit 3 (ein Tagesmarsch) gekennzeichnet. Im zweiten Fall hingegen, wenn der erste Tag regnerisch ist, steigt sie zwei Stufen hinauf, geht in der Nacht eine Stufe hinunter und steigt am zweiten Tag unabhängig vom Wetter wieder zwei Stufen hinauf: Ihre Route wird daher mit 213 gekennzeichnet.

Wenn man davon ausgeht, dass Tortuga nie ihre Kräfte spart, d. h. dass sie am Tag immer so viele Stufen wie möglich steigt, und dass die Tage dort, wo sie lebt, immer entweder ganz sonnig oder ganz regnerisch sind, auf **wie viele verschiedene Arten kann Tortugas Route gekennzeichnet werden, wenn die Treppe sechs Stufen hat?**

9 Die Schachkönigin

Neben dem Feld, das sie besetzt, kontrolliert die Dame beim Schach auch alle Felder, welche sich auf derselben Reihe, Spalte oder Diagonale als sie befinden.

Auf einem 2x2-Schachbrett kann sich eine Dame somit zu allen anderen Feldern des Schachbrettes bewegen. Die folgende Abbildung zeigt die vier verschiedenen Konfigurationen:



Alice hat ein 4 x 4-Schachbrett und so viele Königinnen, wie sie möchte. Sie möchte jedoch so wenige wie möglich davon verwenden und sie so positionieren, dass sie alle 16 Felder besetzen oder erreichen können.

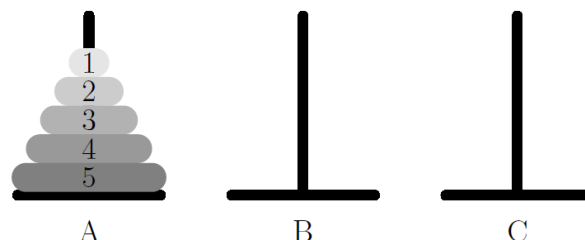
Wie viele Königinnen muss sie mindestens einsetzen? Und auf wie viele verschiedene Arten kann sie sie aufstellen?

Geben Sie die beiden Zahlen in der Reihenfolge der Fragen an, getrennt durch ein Komma

10 Ein Turm mit 7 Scheiben

Alice spielt mit einem Turm von Hanoi, der aus 7 Scheiben besteht. Sie hat drei Stäbe, A, B und C, und 7 Scheiben mit steigenden Durchmessern, die von 1 bis 7 nummeriert sind (die kleinste ist die Nummer 1, die grösste die Nummer 7). Die Scheiben haben ein Loch in der Mitte und können auf einen der drei Stäbe gesteckt werden.

Anfänglich befinden sich alle Scheiben in Pfahl A, und zwar in der Reihenfolge von der grössten Scheibe an der Basis bis zur kleinsten Scheibe an der Spitze (das Beispiel in der Abbildung ist mit 5 Scheiben).



Alices Ziel ist es, alle sieben Scheiben zum Stab C zu bewegen. Bei jedem Zug wählt sie eine Scheibe an der Spitze eines der Stäbe aus und legt sie auf einen der beiden anderen Stäbe, mit der Einschränkung, dass die darunterliegende Scheibe grösser sein muss oder dass der Stab leer sein muss.

Mit zwei Scheiben kann Alice das Ziel leicht in 3 Zügen erreichen (Scheibe 1 auf Stab B, Scheibe 2 auf C und schliesslich 1 auf C); mit drei Scheiben sind 7 nötig (1 → C, 2 → B, 1 → B, 3 → C, 1 → A, 2 → C und 1 → C).

Wie viele Züge sind mindestens erforderlich, damit Alice mit 7 Scheiben das Ziel erreicht?

11 Wir sind aus dem Tunnel gekommen

2022 Freundinnen müssen durch einen dunklen, engen Tunnel gehen, aber sie haben nur eine Fackel und es können immer nur zwei Freundinnen auf einmal durch den Tunnel gehen.

Jeder von ihnen braucht unterschiedlich lange, um durch ihn zu gehen: Die schnellste braucht 1 Minute, die zweitschnellste 2 Minuten und so weiter bis zur langsamsten, die 2022 Minuten braucht. Wenn zwei Freundinnen gemeinsam über den Weg gehen, dann braucht es die Zeit, die die langsamste für die Durchquerung benötigt.

Gegeben, dass jemand jedes Mal, ausser das letzte Mal, die Fackel zurückgeben muss, **wie lange (in Minuten) dauert es dann mindestens, bis alle durch den Tunnel gegangen sind?**

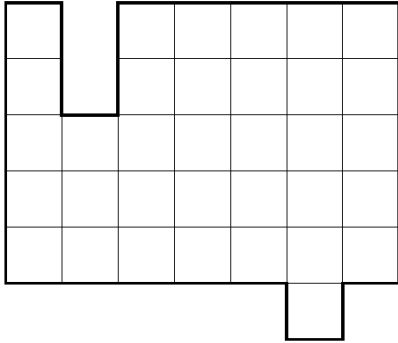
12 Alle bis 2022 online

An manchen Vormittagen macht es Alice Spass, aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen aufzuschreiben und dann ihre Summe zu berechnen. Es ist 12 Uhr, es ist noch etwas Zeit bis zum Mittagessen und sie hat gerade alle möglichen Folgen von aufeinanderfolgenden Zahlen aufgeschrieben, deren Summe 2022 ist.

Was ist die kleinste aller Zahlen, die sie geschrieben hat?

13 Bobs Palindromfeld

Bob, der einen palindromischen Vornamen (der unverändert bleibt, wenn er von rechts gelesen wird) trägt, besitzt ein Grundstück mit einer ebenfalls palindromischen Fläche von $41,14 \text{ m}^2$ mit der folgenden Form:



Da er es in zwei gleiche Teile teilen will, die durch Drehen oder Umdrehen deckungsgleich sind, baut er einen Zaun, indem er den Linien des Rasters in der Abbildung folgt.

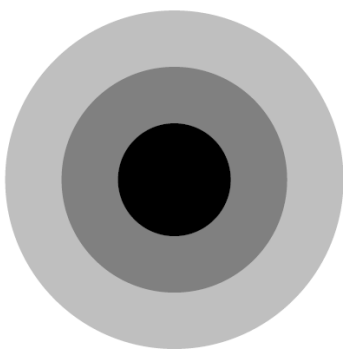
Wie lang (in m) ist der Zaun, den er gebaut hat?

Wenn Sie Ihre Antwort geben, runden Sie das Ergebnis bitte auf den nächsten dm auf oder ab.

14 Darts

Alice will eine Dartscheibe bauen und teilt den Kreis in drei konzentrische Bereiche ein, wie im Bild dargestellt. In jeder dieser Flächen soll sie eine ganze Zahl schreiben, die das Ergebnis des Wurfs darstellt, wenn der Dartpfeil diese Fläche trifft. Trifft der Dartpfeil keine Fläche, erreicht Alice die Zahl 0.

Alice muss nun drei ganze Zahlen auswählen, eine für jede Fläche, aber sie will sie so auswählen, dass sie mit der Summe aus drei verfügbaren Würfeln alle Zahlen zwischen 1 und einer bestimmten Zahl N erreichen kann.

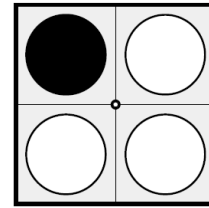


Wenn sie z. B. die Zahlen 1, 1, 2 wählt, kann sie alle Punkte zwischen 0 (erreicht, indem sie alle drei Würfe verfehlt) und $N = 6$ (drei Darts im Bereich mit 2) erzielen. Wenn sie hingegen die Zahlen 1, 5, 6 wählt, könnte sie Ergebnisse zwischen 1 und 3 sowie höhere Ergebnisse erzielen, aber sie könnte auf keinen Fall das Ergebnis von 4 erreichen und würde daher bei $N = 3$ stehen bleiben.

Angenommen, Alice wählt die drei Zahlen so gut aus, dass N das maximal mögliche Ergebnis ist, **wie gross ist dann N ?**

15 Die vier Murmeln

Bob legt, nachdem er Alice die Augen verbunden hat, vier identische Murmeln mit jeweils einer weissen und einer schwarzen Seite auf ein quadratisches Spielfeld, das in vier Sektoren unterteilt ist, sodass die sichtbaren Seiten nicht alle die gleiche Farbe haben (im dargestellten Beispiel zeigt eine Murmel die schwarze Seite und drei die weissen Seiten).



Alice, deren Augen während des gesamten Spiels verbunden sind, hat das Ziel, alle vier Murmeln in der gleichen Farbe erscheinen zu lassen. Das Spiel endet, wenn Sie dieses Ziel erreicht.

Eine Bewegung besteht aus zwei Phasen, in dieser Reihenfolge:

1. Bob dreht das gesamte Spielfeld um entweder 0, 90, 180 oder 270 Grad (die Murmeln können also auch in derselben Position bleiben).
2. Alice dreht 0 bis 4 Murmeln um, wobei sie deren sichtbare Farbe ändert (sie kann sie also unverändert lassen, oder eine oder mehrere umdrehen).

Angenommen, Alice wendet eine optimale Strategie an, im schlimmsten Fall, **wie viele Züge sind minimal nötig, um das Ziel zu erreichen?** (Geben Sie 0 an, wenn Sie glauben, dass es keine optimale Strategie gibt, mit der das Ziel in einer endlichen Anzahl von Zügen erreicht werden kann).

16 Erste Schachbretter

Alice besucht mit ihrer siebenjährigen Tochter Bobs Schachladen, um Schachbretter zu kaufen. Es ist ein etwas ungewöhnlicher Schachladen: Bob verkauft nur quadratische Schachbretter, deren Seitenlänge eine Primzahl von Feldern ist. Sie können also Schachbretter mit 3×3 oder 7×7 finden, aber nicht 8×8 oder 10×10 .

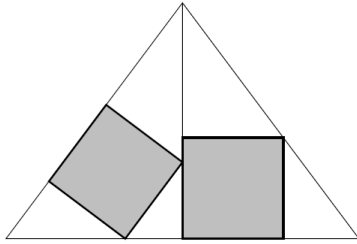
"Hallo Bob, dieses Jahr möchte ich ein Schachbrett für meine Tochter, eines für ihre Schwester und eines für mich, aber ich möchte, dass die Gesamtzahl der Felder gleich 2022 ist."

"Nun, Alice", antwortete Bob, "ich habe genau das, was du brauchst: drei wunderschöne, erstklassige Schachbretter, genau nach deinen Wünschen".

Wie viele Felder haben die Seiten der drei Schachbretter, die Bob an Alice verkauft hat? (Geben Sie die drei Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an, mit Kommas getrennt)

17 Die Quadrate des Dreiecks

Das gleichschenklige Dreieck in der Abbildung unten wird durch die Höhe in zwei Hälften geteilt. Die Höhe misst $\frac{2}{3}$ der unteren Grundlinie. Das schräge Quadrat auf der linken Seite hat 35 mm Seitenlänge.



Was ist die Seitenlänge des rechten Quadrats in mm?

18 World Master Chess (WMC) 2022

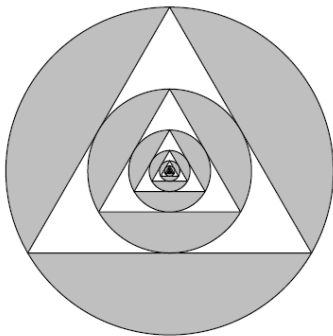
Im diesjährigen World Master Chess (WMC) Turnier trifft jeder Spieler genau einmal auf jeden anderen Spieler. Jede Partie erhält 1 Punkt für einen Sieg, 0 Punkte für eine Niederlage und $\frac{1}{2}$ Punkte für ein Unentschieden.

Am Ende des Turniers wird die Rangliste erstellt und alle Spieler, bis auf die letzten zehn, erhalten eine Belohnung. Dabei ist ein recht ungewöhnliches Phänomen zu beobachten: Jeder Spieler erzielt in Spielen gegen die letzten zehn Spieler der Rangliste genau die Hälfte seiner Punkte.

Wie viele Spieler haben an der WMC 2022 teilgenommen?

19 Von Flatland bis in die Unendlichkeit

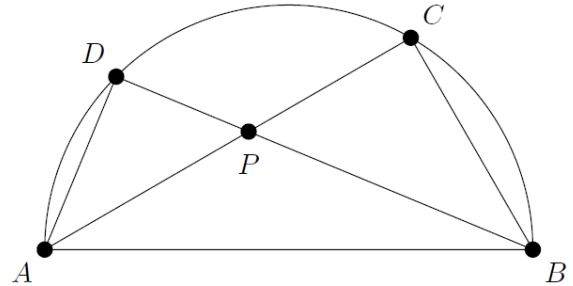
Innerhalb eines ersten grauen Kreises liegt ein weisses gleichseitiges Dreieck, innerhalb dieses Dreiecks liegt ein zweiter grauer Kreis, innerhalb dieses Kreises liegt ein weiteres weisses gleichseitiges Dreieck, und so weiter bis zur Unendlichkeit, wie in der Abbildung gezeigt.



Wie ist das Verhältnis zwischen der gesamten grauen Fläche und der Fläche des grössten Kreises? Geben Sie das Ergebnis in Form eines nicht kürzbaren Bruchs vom Typ $\frac{a}{b}$ an und approximieren Sie $\sqrt{2}$ mit $\frac{99}{70}$, $\sqrt{3}$ mit $\frac{473}{273}$, π mit $\frac{22}{7}$ und.

20 Ganz

Bob besitzt ein perfekt halbkreisförmiges Grundstück, wie in der Abbildung dargestellt, und möchte es in mehrere Teile (sechs) unterteilen, indem er zwei dreieckige Zäune baut, deren gemeinsame Basis der Durchmesser des Halbkreises (AB) ist und deren andere Eckpunkte (C und D) auf dem Halbkreis liegen. Bob möchte, dass die beiden Dreiecke ABC und ABD unterschiedlich sind, sodass das Dreieck ABP nicht gleichschenkelig ist.



Alice hilft Bob und gemeinsam bauen sie die Zäune so, dass die Längen in Metern aller (sieben) auf der Abbildung sichtbaren Segmente, die zwischen den Pfosten A , B , C , D und P gebaut werden, ganze Zahlen in Meter sind.

Wie gross ist der minimale Umfang in m des Dreiecks ABP ?