

Online World Math Contest

Deuxième édition, 2022

Université Bocconi - Centre Pristem - Milan

24 septembre 2022

1 Geysers mathématiques

Dans le parc de Yellowstone, deux geysers émettent de la vapeur très régulièrement : le premier toutes les 7 minutes exactement, le second toutes les 9 minutes.

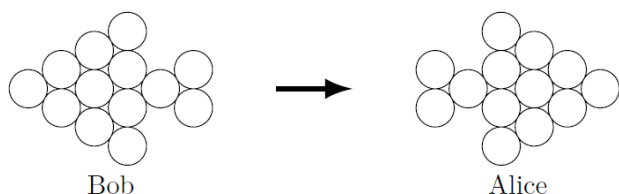
Hier, à 20:22, les deux geysers ont émis un jet de vapeur.

A quel moment, pour la première fois après 20:22, cela s'est-il reproduit ?

Indiquez la réponse en utilisant deux chiffres pour les heures suivis de deux chiffres pour les minutes, séparés par « : » (par exemple 03:14).

2 Pêche à contre-courant

Avec 13 pièces identiques, Bob obtient un petit poisson (à gauche sur l'image), mais il se rend compte que le poisson nage à contre-courant. Alice, en déplaçant certaines des pièces du poisson de Bob, obtient le même poisson (à droite sur l'image), mais il nage dans la bonne direction.



Quel est le nombre minimum de pièces qu'Alice doit déplacer pour obtenir son poisson ?

3 L'heure 2022

Bob a un réveil numérique qui utilise deux chiffres pour les heures (00, 01, 02, ..., 23), deux pour les minutes (00, 01, 02, ..., 59) et deux pour les secondes (00, 01, 02, ..., 59). Au début de cette compétition, le réveil indique 140000.

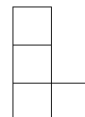
Avant le déjeuner, Bob jette un coup d'œil à son réveil, il indique 120220 ; plus tard, le réveil indique 152022 à un moment donné ; à l'heure du dîner, le réveil indique 202230.

Bob note que dans les trois cas, l'heure affichée contient les quatre chiffres de l'année en cours, dans le même ordre et à proximité les uns des autres, bien que dans des positions différentes.

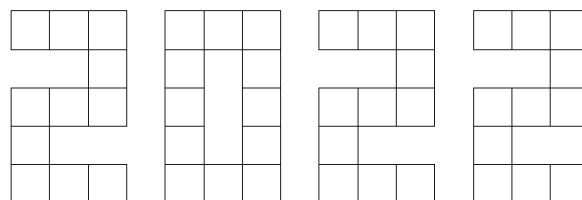
Combien de fois par 24 heures ce phénomène se produit-il ?

4 2022 en carrés et rectangles

Dans la figure suivante en forme de L, on peut voir huit rectangles : quatre carrés de dimension 1×1 chacun, trois rectangles de dimensions 1×2 et un rectangle vertical de dimensions 1×3 .



Considérez la figure suivante :



Combien de rectangles sont visibles ?

5 Jours triangulaires

Un jour est dit *triangulaire* s'il est possible de construire un triangle non-plat ayant pour longueurs de côté les trois entiers qui forment sa date : le jour, le mois et les deux derniers chiffres de l'année.

Aujourd'hui, (24, 9, 22), est un *jour triangulaire* car il existe un triangle dont les côtés sont 24, 9 et 22. Samedi prochain, (1, 10, 22), n'est pas *triangulaire* car il n'existe pas de *triangle* dont les côtés sont 1, 10 et 22.

Combien de jours triangulaires y a-t-il en septembre cette année ?

6 La pyramide entière

Alice a reçu en cadeau une pyramide à base carrée dont le volume est de 24 cm^3 . Les mesures, en cm, du côté de la base et de la hauteur sont exprimées par des nombres entiers.

Sachant que le volume d'une pyramide est obtenu en multipliant l'aire de la base (carrée) par la hauteur et en divisant le résultat par 3, **quelles sont les mesures, en cm, de la hauteur minimale et de la hauteur maximale de la pyramide d'Alice ?**

Indiquez les deux nombres, dans l'ordre croissant, séparés par une virgule.

7 Cryptarithme polyglotte

Résolvez le cryptarithme suivant, en remplaçant chaque lettre par un chiffre compris entre 1 et 9, de sorte que des lettres égales correspondent à des chiffres égaux et des lettres différentes à des chiffres différents. Le caractère à la deuxième ligne est le chiffre "0".

(2)	D	E	U	X	+	(français)
(0)				0	+	(numérique)
(2)		D	U	E	+	(italien)
(2)			I	I	=	(romain)

2 0 2 2

A quel nombre correspond le mot IDEE ?

8 La tortue endormie

La tortue Tortuga doit monter en haut d'un escalier. Par une journée ensoleillée, elle parvient à monter trois marches, mais s'il pleut, elle n'arrive qu'à en monter deux. La nuit, cependant, elle s'endort et recule toujours d'une marche.

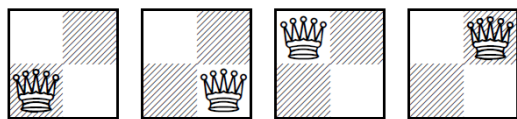
Son exploit peut être représenté par une série de chiffres, dont chacun indique sa position (la marche qu'elle a atteinte) à la fin de chaque déplacement, vers le haut ou vers le bas, et qui se termine par le nombre total de marches de l'escalier.

Tortuga doit d'abord s'attaquer à un escalier de seulement trois marches. Elle sait que tout dépend des conditions météorologiques et calcule qu'elle peut le faire de deux manières différentes. Dans le premier cas, si le premier jour est ensoleillé, elle arrive au sommet le jour même : son itinéraire est marqué par 3 (une étape). Dans le second cas, en revanche, si le premier jour est pluvieux, elle monte de deux marches, puis descend d'une marche pendant la nuit, puis monte de deux marches le second jour, quelles que soient les conditions météorologiques : son chemin est donc indiqué par 213. Si l'on considère que Tortuga n'économise jamais ses forces, c'est-à-dire qu'elle monte toujours le plus de marches possible dans la journée, et que, là où elle vit, les journées sont toujours soit entièrement ensoleillées, soit entièrement pluvieuses, de **combien de façons différentes peut-on représenter la montée de Tortuga sur un escalier de six marches ?**

9 La reine des échecs

Aux échecs, en plus de la case qu'elle occupe, la reine peut se déplacer vers toutes les cases se trouvant sur la même ligne, colonne ou diagonale qu'elle.

Sur un échiquier 2×2 , une reine peut ainsi se déplacer vers n'importe quelle autre case de l'échiquier. La figure suivante montre les quatre configurations différentes :



Alice dispose d'un échiquier 4×4 et d'autant de reines qu'elle le souhaite. Cependant, elle veut en utiliser le moins possible et les positionner de manière qu'elles occupent ou puissent se déplacer sur les 16 cases de l'échiquier.

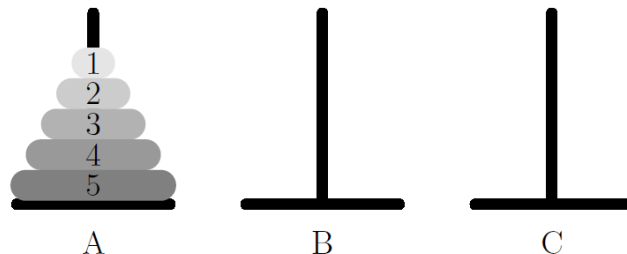
Quel est le nombre minimum de reines qu'elle doit utiliser ? Et de combien de façons différentes peut-elle les placer ?

Indiquez les deux nombres, dans l'ordre des questions, séparés par une virgule.

10 Une tour avec 7 disques

Alice joue avec une tour de Hanoi composée de 7 disques. Elle a trois piquets, A , B et C , et 7 disques de diamètre croissant et numérotés de 1 à 7 (le plus petit est le numéro 1, le plus grand le numéro 7). Les disques ont un trou central et peuvent être insérés sur l'un des trois piquets.

Initialement, tous les disques se trouvent dans le piquet A , dans l'ordre du plus grand à la base au plus petit au sommet (l'exemple de la figure est avec 5 disques).



Le but d'Alice est de déplacer les 7 disques vers le piquet C . À chaque déplacement, elle choisit un disque au sommet de l'une des piles et le déplace vers l'une des deux autres piles, avec la contrainte qu'il doit être placé sur un disque plus grand ou que la pile doit être vide.

Avec deux disques, Alice peut facilement atteindre le but en 3 coups (disque 1 en piquet B , disque 2 en C et enfin 1 en C) ; avec trois disques, 7 sont nécessaires ($1 \rightarrow C$, $2 \rightarrow B$, $1 \rightarrow B$, $3 \rightarrow C$, $1 \rightarrow A$, $2 \rightarrow C$ et $1 \rightarrow C$).

Quel est le nombre minimum de coups requis pour qu'Alice atteigne le but avec 7 disques ?

11 Nous sommes sortis du tunnel

2022 amis doivent traverser un tunnel sombre et étroit, mais ils n'ont qu'une seule torche et ne peuvent passer que deux à la fois.

Chacun d'entre eux met un temps différent pour le traverser : le plus rapide met 1 minute, le deuxième 2 minutes, et ainsi de suite jusqu'au plus lent, qui met 2022 minutes. Si deux amis passent ensemble, le temps nécessaire à la traversée est celui du plus lent.

Sachant qu'à chaque fois, sauf pour le dernier passage, quelqu'un doit ramener la torche, **combien de temps, en minutes, faudra-t-il, au minimum, pour que tout le monde passe ?**

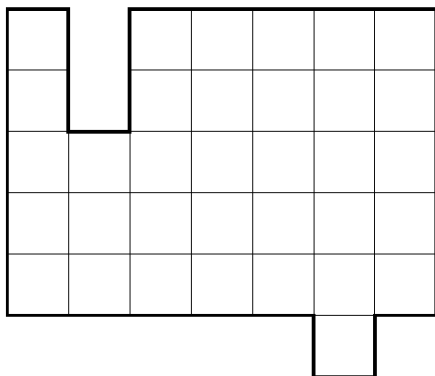
12 Tous en ligne pour 2022

Certains matins, Alice s'amuse à noter des nombres entiers positifs consécutifs, puis à calculer leur somme. Il est 12 heures, il reste encore un peu de temps avant le déjeuner, et elle vient de finir d'écrire toutes les suites possibles de nombres consécutifs dont la somme est 2022.

Quel est le plus petit de tous les nombres qu'elle a écrits ?

13 Le terrain palindrome de Bob

Bob, prénom palindrome (qui reste inchangé lorsqu'il est lu à partir de la droite), possède un terrain de superficie $41,14 \text{ m}^2$ également palindrome, et qui a la forme suivante :



Voulant le diviser en deux parts identiques, qui peuvent être obtenues l'une de l'autre par rotation ou par retournement, il construit une clôture en suivant les lignes de la grille de la figure.

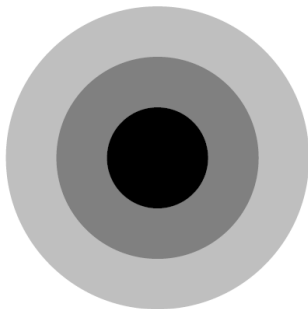
Quelle est la longueur, en m, de la clôture qu'il a construite ?

En donnant votre réponse, veuillez arrondir le résultat au dm le plus proche.

14 Fléchettes

Alice veut construire une cible pour jouer aux fléchettes et divise le cercle en trois zones concentriques, comme sur l'image. Dans chacun de ces secteurs, elle doit écrire un nombre entier représentant le score du lancer si la fléchette touche ce secteur. Si la fléchette ne touche aucun secteur, elle obtient le score de 0.

Alice doit alors choisir trois nombres entiers, un pour chaque zone, mais elle veut les choisir de telle sorte que, avec trois lancers disponibles, elle puisse totaliser tous les nombres compris entre 0 et un certain nombre N .

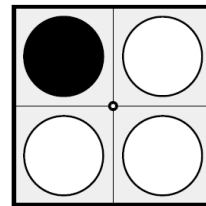


Si, par exemple, elle choisit les nombres 1, 1, 2, elle pourra obtenir tous les scores compris entre 0 (obtenu en ratant les trois lancers) et $N = 6$ (trois fléchettes dans la zone avec 2). Si par contre, elle choisissait les nombres 1, 5, 6, elle pourrait obtenir des scores entre 0 et 3 et d'autres plus élevés, mais ne pourrait en aucun cas atteindre le score de 4, et s'arrêterait donc à $N = 3$.

En supposant qu'Alice choisisse les trois nombres de la meilleure façon pour que N soit le maximum possible, **combien vaut N ?**

15 Les quatre jetons

Bob, après avoir bandé les yeux d'Alice, dispose quatre jetons identiques, chacun ayant une face blanche et une face noire, sur un plateau carré divisé en quatre secteurs de sorte que les faces représentées ne soient pas toutes de la même couleur (dans l'exemple présenté, un jeton montre la face noire et trois la face blanche).



Alice, qui a les yeux bandés pendant toute la durée du défi, a pour objectif de faire apparaître les quatre jetons de la même couleur. Le jeu se termine dès qu'elle y arrive.

Un mouvement se compose de deux phases, dans cet ordre :

1. Bob fait tourner l'ensemble du plateau, en choisissant l'une des quatre rotations de 0, 90, 180 et 270 degrés (les jetons peuvent donc rester dans la même position).
2. Alice retourne de 0 à 4 jetons, en inversant leur couleur (elle peut donc les laisser inchangés ou en retourner un ou plusieurs).

En supposant qu'Alice adopte une stratégie optimale, dans le pire cas de départ, **quel est le nombre minimum de coups nécessaires pour atteindre la cible ?** (indiquez 0 si vous pensez qu'il n'existe pas de stratégie optimale permettant d'atteindre la cible en un nombre fini de coups).

16 Premiers échiquiers

Alice se rend avec sa fille de 7 ans au magasin d'échecs de Bob pour acheter des échiquiers. C'est un magasin d'échecs un peu particulier : il ne vend que des échiquiers carrés dont le côté est un nombre premier de cases. Vous pouvez donc trouver des échiquiers 3×3 ou 7×7 , mais pas 8×8 ou 10×10 .

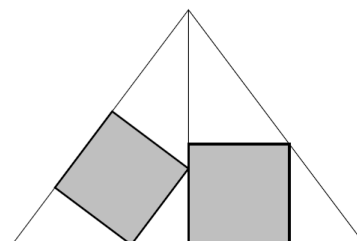
"Salut Bob, cette année je voudrais un échiquier pour ma fille, un pour sa sœur et un pour moi, mais je voudrais que le nombre total de cases soit égal à 2022."

"Eh bien Alice", a répondu Bob, "j'ai ce qu'il te faut : trois magnifiques échiquiers de premier choix, exactement comme tu le souhaites".

Combien de cases ont les côtés des trois échiquiers vendus par Bob à Alice ? (indiquez les trois nombres, dans l'ordre croissant, séparés par des virgules)

17 Les carrés du triangle

Le triangle isocèle de la figure ci-dessous est divisé en deux par la hauteur, qui mesure les $\frac{2}{3}$ de la base. Le carré incliné de gauche a un côté de 35 mm.



Combien mesure le côté du carré de droite en mm ?

18 World Master Chess (WMC) 2022

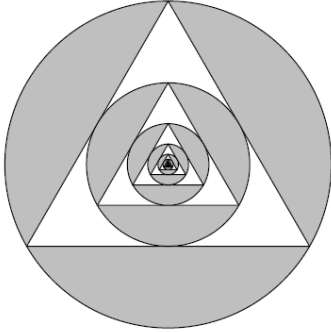
Dans le tournoi World Master Chess (WMC) de cette année, chaque joueur rencontre exactement une fois chaque autre joueur. Chaque jeu se voit attribuer 1 point pour la victoire, 0 point pour la défaite et $\frac{1}{2}$ point pour un match nul.

A la fin du tournoi, le classement est établi et tous les joueurs, sauf les dix derniers, sont récompensés. On observe un phénomène assez particulier : chaque joueur marque exactement la moitié de ses points dans les matchs contre les dix derniers joueurs du classement.

Combien de joueurs ont participé au WMC 2022 ?

19 De Flatland à l'infini

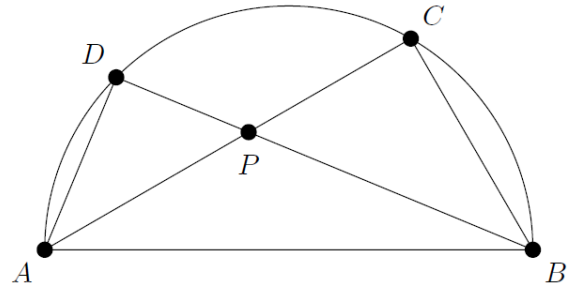
A l'intérieur d'un premier cercle gris est inscrit un triangle équilatéral blanc, à l'intérieur duquel est inscrit un deuxième cercle gris, à l'intérieur duquel se trouve un autre triangle équilatéral blanc, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, comme sur la figure.



Quel est le rapport entre la surface grise totale et la surface du plus grand cercle ? (Indiquez votre réponse sous forme de fraction irréductible et utilisez les approximations suivantes : $\frac{99}{70}$ pour $\sqrt{2}$, $\frac{473}{273}$ pour $\sqrt{3}$, $\frac{22}{7}$ pour π).

20 Tous entiers

Bob possède un terrain parfaitement semi-circulaire, comme sur la figure, et veut le diviser en plusieurs parties (six) en construisant deux clôtures triangulaires dont la base commune est le diamètre du demi-cercle (AB) et les autres sommets (C et D) sont sur le demi-cercle. Bob veut que les deux triangles ABC et ABD soient différents, de sorte que le triangle ABP ne soit pas isocèle.



Alice aide Bob et ensemble ils construisent les clôtures de sorte que les mesures, en m, de tous les (sept) segments visibles sur la figure, construits entre les poteaux A , B , C , D et P , soient exprimées par des nombres entiers.

Quel est le périmètre minimal, en m, du triangle ABP ?