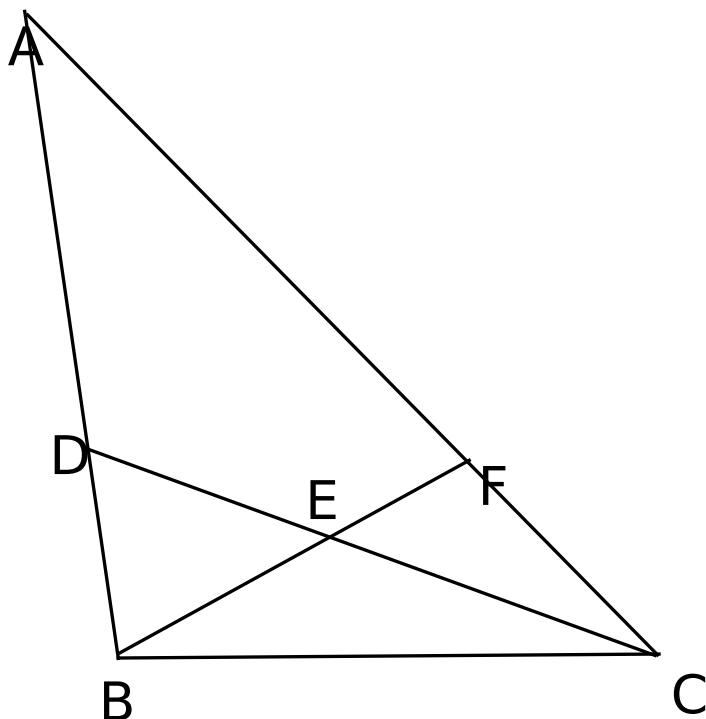


Problème n° 18 des quarts de finale du 37ème championnat de la FFJM

: "Le potager du père Sil"



L'angle CBD est « légèrement » obtus.

$BC = 13$ mètres
 $BF = 10$ mètres
 $CD = 15$ mètres

Tous les segments sont des nombres entiers de mètres.

Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Dans le triangle BCD, on a : $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \times BD \times BC \times \cos CBD$ (théorème d'Al-Kashi)

Donc $15^2 = BD^2 + 13^2 - 2 \times 13 \times BD \times \cos CBD$, soit $BD \times (BD - 26 \times \cos CBD) = 56 = 7 \times 8$

Comme $\cos CBD$ est « légèrement » négatif, et comme BD est entier, on a **$BD = 7$** et $\cos CBD = -1/26$

Dans le triangle BCD, on a aussi : $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \times \cos BCD$

Donc $7^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \times 13 \times 15 \times \cos BCD$ et donc $\cos BCD = 23/26$

Dans le triangle BCE, on a : $BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2 \times BC \times CE \times \cos BCE$

Donc $BE^2 = 13^2 + CE^2 - 2 \times 13 \times CE \times (23/26)$ et donc $BE^2 = (13 - CE)^2 + 3 \times CE$

Comme $0 < CE < 15$, on constate aisément que la seule solution possible est **$CE = 8$** , donc que **$BE = 7$**

Dès lors, **$DE = 7$ et $EF = 3$**

Dans le triangle CEF, on a : $CF^2 = CE^2 + EF^2 - 2 \times CE \times EF \times \cos CEF$

Comme le triangle BDE est équilatéral, chacun de ses côtés valant 7, l'angle BED vaut donc 60° , de même l'angle CEF. Donc $\cos CEF = 1/2$ et $CF^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times (1/2) = 49$ et **$CF = 7$**

Dans le triangle BCF, on a : $BF^2 = BC^2 + CF^2 - 2 \times BC \times CF \times \cos BCF$

Donc $10^2 = 13^2 + 7^2 - 2 \times 13 \times 7 \times \cos BCF$ et donc $\cos BCF = 59/91$

Dans le triangle ABC, on a : $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos BCF$

Donc $AB^2 = 13^2 + AC^2 - 2 \times 13 \times AC \times (59/91)$ et donc $AB^2 = AC^2 - (118/7) \times AC + 13^2$
(1)

Dans le triangle ABC, on a aussi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos CBD$

Donc $AC^2 = AB^2 + 13^2 - 2 \times 13 \times AB \times (-1/26) = AB^2 + AB + 13^2$
(2)

De (1) et (2), on déduit que $(118/7) \times AC - AB = 2 \times 13^2$

Donc AC est multiple de 7 et, comme $AB < AC$, on déduit aisément que **AC = 21** et donc **AB = 16**

L'aire du triangle ABC se calcule à l'aide de la formule $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

On a $S = \sqrt{25 \times 9 \times 4 \times 12}$, soit **$S = 60 \sqrt{3} = 104 \text{ m}^2$**