

**Problème n° 17 des demi-finales du 37ème championnat de
la FFJM :
"Le calcul d'Al Ambiqué"**

Soit A le résultat du calcul. On constate aisément que $A^2 = A + 23 \times 44484$

On a donc une équation du 2nd degré facile à résoudre avec une calculatrice, mais très lourde à résoudre à la main.

Sans calculatrice, il est plus facile de constater que, si l'on écrit l'équation sous la forme

$$A(A - 1) = 23 \times 44484 = 23 \times 3 \times 4 \times 11 \times 337 \approx 10^6$$

il suffit de répartir les facteurs en deux groupes valant chacun environ 1000.

La seule répartition possible est $337 \times 3 = 1011$ et $23 \times 4 \times 11 = 1012$

La réponse est immédiate $A = 1012$

**Problème n° 18 des demi-finales du 37ème championnat de
la FFJM :
"Les halls d'Archie"**

Soit A , B , et 15 les dimensions du parallépipède rectangle.

Le carré de la grande diagonale vaut $A^2 + B^2 + 15^2$ et le volume vaut $15 \times A \times B$

Donc il faut trouver A et B entiers tels que $A^2 + B^2 + 15^2 = 15 \times A \times B$

Constatons d'abord que, pour que $A^2 + B^2$ soit multiple de 3 , il faut que A et B soient chacun des multiples de 3 .

En posant $A = 3 \times M$ et $B = 3 \times N$, on obtient $M^2 + N^2 + 5^2 = 15 \times M \times N$

Que l'on peut aussi écrire, en considérant qu'il s'agit d'une équation du second degré en M

$$2 \times M = (15 \times N) \pm \sqrt{(15 \times N)^2 - 4(N^2 + 5^2)}$$

Il faut donc trouver N tel que $221 N^2 - 100$ soit un carré.

- Pour $N = 1$, on a 2 solutions $M = 2$ ou $M = 13$ donc le volume = 270 ou 1755

- Pour $N = 2$, on a 2 solutions $M = 1$ ou $M = 29$ donc le volume = 270 (déjà trouvé) ou 7830

- Pour $N = 3$, il n'y a pas de solution entière mais les 2 solutions sont $M < 1$ (à rejeter) et $M > 40$

Avec $N = 3$ et $M > 40$, on a déjà un volume supérieur à 16200. Donc, pour $N \geq 3$, M allant en augmentant, il n'y a pas de solutions avec un volume inférieur à 10000.

Les solutions sont donc : 270, 1755 et 7830