

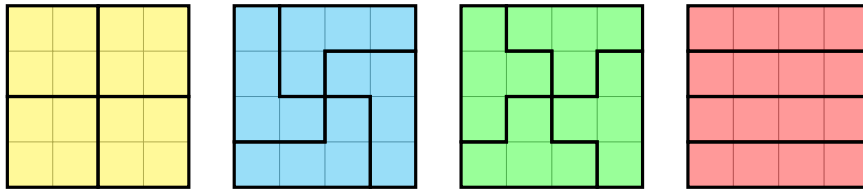
FSJM - 1/4 de Finale Individuels - Résolution

Simon Gilgien, Bastien Faller

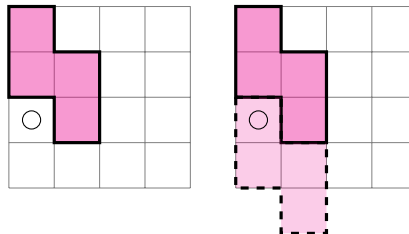
18 février 2024

1 Tétraminos

On peut recouvrir la grille avec les pièces A, B, D et E par exemple de la façon suivante :



On peut se convaincre qu'un recouvrement de la grille n'est pas possible avec la pièce C car la case du coin de la grille doit forcément être couverte par une pièce dans la position illustrée à gauche (à symétrie près). La case marquée d'un cercle ne peut alors pas être couverte par une pièce entièrement sur la grille et ne recouvrant pas la première.



La solution est donc C.

2 Les fléchettes

On part du nombre de fléchettes ayant atteint la zone à 9 points :

- Avec 2 fléchettes dans la zone à 9 points il reste 6 points à marquer. Il n'y a donc pas de fléchette dans la zone à 5 points (car il resterait 1 point à marquer, ce qui n'est pas possible) et 3 fléchettes dans la zone à 2 points, pour un total de 5 fléchettes ($2 \times 9 + 3 \times 2 = 24$).
- Avec 1 fléchette dans la zone à 9 points il reste 15 points à marquer. Cela peut être réalisé par 3 fléchettes dans la zone à 5 points, pour un total de 4 fléchettes ($1 \times 9 + 3 \times 5 = 24$). Il est possible de remplacer deux des

fléchettes à 5 points par 5 fléchettes dans la zone à 2 points, mais cela fait 3 fléchettes de plus.

- Sans fléchette dans la zone à 9 points, puisque le nombre de points à atteindre est pair il faut un nombre pair de fléchettes dans la zone à 5 points. Les possibilités sont donc 12 fléchettes dans la zone à 2 points ou 2 fléchettes dans la zone à 5 points et 7 fléchettes dans la zone à 2 points ou (le meilleur résultat dans cette configuration) 4 fléchettes dans la zone à 5 points et 2 fléchettes dans la zone à 2 points pour un total de 6 fléchettes ($4 \times 5 + 2 \times 2 = 24$).

Le meilleur résultat qu'on peut obtenir est donc **4** fléchettes.

3 La bibliothèque

On a les informations suivantes sur les livres de la bibliothèque :

- (A) La bibliothèque contient uniquement des recueils et des romans.
- (B) Tous les recueils sont bleus.
- (C) Les romans de plus de 100 pages sont blancs.

Étudions donc les livres proposés :

- Le livre 1 est jaune. La règle (B) dit que ce n'est pas un recueil (puisque'il n'est pas bleu). La règle (A) dit donc que c'est un roman (puisque ce n'est pas un recueil). Puisque c'est un roman, la règle (C) dit que si ce livre fait plus de 100 pages alors il doit être blanc. Puisqu'on sait qu'il n'est pas blanc mais jaune, on en déduit que ce livre fait moins de 100 pages. On peut vérifier qu'un roman de moins de 100 pages à couverture jaune satisfait les trois règles. Il peut donc être dans la bibliothèque.
- Le livre 2 est vert et a 85 pages. La règle (B) dit que ce n'est pas un recueil (puisque'il n'est pas bleu). La règle (A) dit donc que c'est un roman. Puisqu'il fait 85 pages il fait moins de 100 pages et la règle (C) ne nous apprend rien sur ce livre. Un roman de 85 pages à couverture verte satisfait les 3 règles et ce livre peut donc être dans la bibliothèque.
- Le livre 3 est orange et a 120 pages. La règle (B) dit que ce n'est pas un recueil (puisque'il n'est pas bleu), et la règle (A) dit donc que c'est un roman. On sait donc que c'est un roman de plus de 100 pages, et la règle (C) affirme donc qu'il est blanc. Or on sait que le livre est orange. Il y a une contradiction, et ce livre ne peut donc pas provenir de la bibliothèque.
- Le livre 4 est rouge. Par le même raisonnement que pour le livre 1 on déduit qu'il doit s'agir d'un roman de moins de 100 pages. Un roman de moins de 100 pages à couverture rouge respecte les trois règles et peut donc être dans la bibliothèque.

Le livre qui ne peut pas provenir de la bibliothèque est donc le livre **3**.

4 Les bonbons

Appelons A , B , C et D le nombre de bonbons d'Alice, Bernard, Chloé et Damien respectivement. La donnée nous dit que :

- À eux quatre, ils en ont au total 24 :

$$A + B + C + D = 24$$

- Bernard en a deux fois plus que Damien :

$$B = 2 \times D$$

- Alice en a 6 fois plus que Chloé :

$$A = 6 \times C$$

En remplaçant B et A dans la somme, on a

$$6 \times C + 2 \times D + C + D = 24$$

et en regroupant les termes

$$7 \times C + 3 \times D = 24$$

On essaie les différentes valeurs possibles de C :

- Si $C = 1$, on obtient

$$7 \times 1 + 3 \times D = 24$$

c'est à dire

$$7 + 3 \times D = 24$$

qui devient

$$3 \times D = 17$$

ce qui n'est pas possible pour une valeur entière de D . On déduit donc que $C \neq 1$.

- Si $C = 2$, on obtient

$$7 \times 2 + 3 \times D = 24$$

c'est à dire

$$14 + 3 \times D = 24$$

soit

$$3 \times D = 10$$

De nouveau, ce n'est pas possible pour une valeur entière de D . On déduit donc que $C \neq 2$.

- Si $C = 3$, on obtient

$$7 \times 3 + 3 \times D = 24$$

c'est à dire

$$21 + 3 \times D = 24$$

qui devient

$$3 \times D = 3$$

Ce qui est possible si $D = 1$. On a donc trouvé la solution : $C = 3$ et $D = 1$. On obtient donc $A = 6 \times C = 18$ et $B = 2 \times D = 2$.

Alice possède donc **18** bonbons.

5 Un partage facile

On peut découper la figure ainsi :

1	2	3		
4	5	6	7	8
9	10	11	12	
13	14	15	16	
		17	18	19
20	21	22	23	24

Les numéros des cases appartenant à la même partie que la case numéro 24 sont donc, dans l'ordre croissant **11, 12, 15, 16, 19 et 24**.

6 L'escargot

Après la première heure, l'escargot est monté de 3 mètres. Ensuite, toutes les deux heures il monte d'un mètre supplémentaire, *en n'étant jamais monté plus haut que ce point*. Il lui faut donc $21 \times 2 \text{ h} = 42 \text{ h}$ pour monter les 21 m supplémentaires et arriver au sommet du puit. Il lui faut donc en tout $43 \text{ h} = 48 \text{ h} - 5 \text{ h}$ pour arriver en haut du puit, soit 5 heures de moins que deux jours. Deux jours après le départ de l'escargot est le mardi à midi. Cinq heures avant midi le mardi donne l'heure d'arrivée de l'escargot : **le mardi à 7 h (du matin)**.

7 La tirelire de Mathilde

Appelons a , b , et c le nombre de pièces de 50, 20 et 10 centimes respectivement. On nous indique que $1 + a + b + c = 24$ soit $a + b + c = 23$ et $1 < a < b < c$. Pour maximiser la somme, il faut minimiser le nombre de pièces de 10 centimes (puisque le nombre total de pièces est fixe, on veut des pièces de plus grande valeur).

Puisque $b < c$ et $a < c$, on a $23 = a + b + c < 3 \times c$ et donc $c > \frac{23}{3}$. Comme c est entier, cela implique que $c \geq 8$.

- Si $c = 8$, alors $a + b = 15$, mais a et b doivent être des entiers strictement plus petits que 8, et donc $a + b \leq 7 + 7 = 14$. Ce cas n'est donc pas possible et c doit être plus grand.
- Si $c = 9$, alors $a + b = 14$. Comme a et b sont des entiers avec $a < b < 9$, on doit avoir $a = 6$ et $b = 8$. On a donc trouvé le nombre de pièces dans chaque pile.

La somme dans la tirelire de Mathilde est donc donnée par $1 \times 1.00 + 6 \times 0.50 + 8 \times 0.20 + 9 \times 0.10 = 1.00 + 3.00 + 1.60 + 0.90 = \mathbf{6.50}$

8 Les quatre carrés

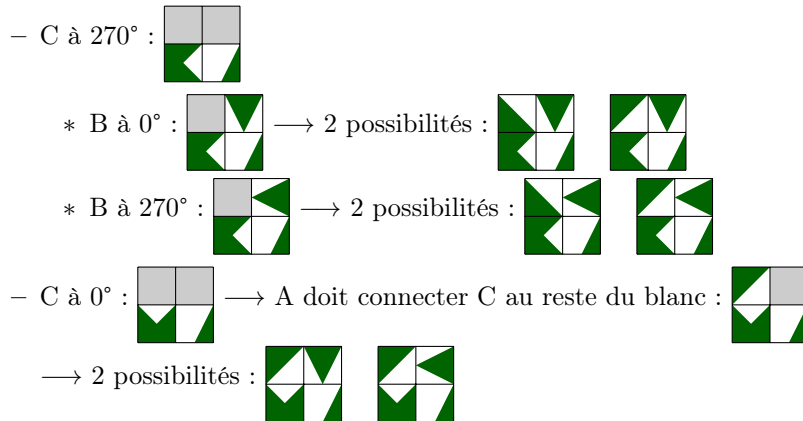


Comme les quatre petits carrés ont tous des formes différentes et que le carré fixe n'a ni axe ni centre de symétrie, on peut se convaincre que chaque permutation des trois carrés restants et chaque orientation des petits carrés donne une forme différente, y compris après rotation et symétrie.

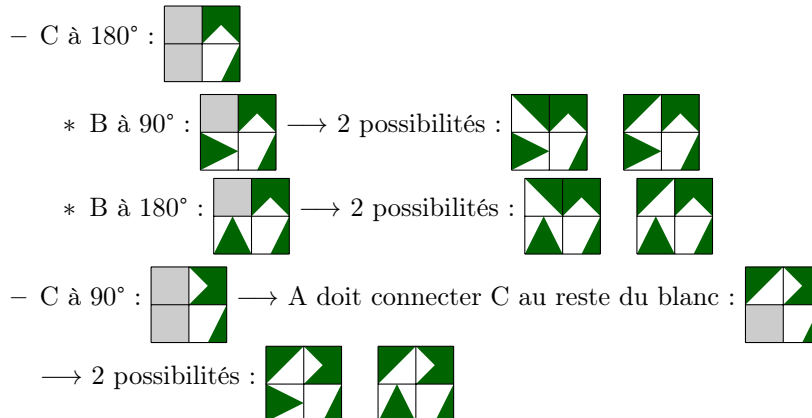
On note de plus que le carré B ne peut pas avoir un de ses coins complètement blanc (en bas sur l'image) au coin du grand carré, car un des triangles blancs serait séparé du reste de la partie blanche. De même, le coin blanc du carré A ne peut pas être au coin du grand carré. Finalement, le carré C doit avoir le côté du triangle blanc vers l'intérieur du grand carré et connecté au reste de la partie blanche. Pour résumer, le carré A peut avoir au maximum 3 orientations à chaque position, et les carrés B et C peuvent chacun avoir au maximum 2 orientations dans chaque position.

Énumérons les différentes possibilités, d'abord par permutation des carrés, puis par orientation des carrés C, B, puis A :

- ABC sur 123 :



- ABC sur 132 :



• ABC sur 213 :

- C à 270° :  → A doit connecter B au reste du blanc : 
- 1 possibilité : 
- C à 0° :  → A doit connecter B à D : 
- 2 possibilités :  

• ABC sur 231 :

- C à 180° : 
- * B à 90° :  → 2 possibilités :  
- * B à 180° :  → 2 possibilités :  
- C à 270° :  → A doit connecter C au reste du blanc : 
- 1 possibilité : 

• ABC sur 312 :

- C à 180° :  → A doit connecter B au reste du blanc : 
- 1 possibilité : 
- C à 90° :  → A doit connecter B à D : 
- 2 possibilités :  

• ABC sur 321 :

- C à 180° :  → A doit connecter C au reste du blanc : 
- 1 possibilité : 
- C à 270° : 
- * B à 0° :  → 2 possibilités :  
- * B à 270° :  → 2 possibilités :  

On compte au total **28** dispositions différentes.

Une façon d'accélérer l'énumération (ou de vérifier les résultats) est de voir que les côtés du carré D en contact avec les carrés sont symétriques. Les solutions ont donc toute un miroir par symétrie autour de la diagonale commune de A et D (les formes finales sont distinctes à cause de l'asymétrie du carré D).

9 Les deux calendriers

Une année comporte 365 jours (sauf les années bissextiles qui en ont 366). Une semaine compte 7 jours. On observe

$$365 = 52 \times 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$366 = 52 \times 7 + 2 \equiv 2 \pmod{7}$$

Ainsi la même date avance d'un jour dans la semaine d'une année sur l'autre, et de deux jours en cas d'année bissextile. On peut donc calculer le jour de la semaine du premier mars de chaque année du 21ème siècle antérieure à 2024.

- 2024 : vendredi (donné)
- 2023 : mercredi (le 29 février 2024 est compris dans cette année)
- 2022 : mardi
- 2021 : lundi
- 2020 : dimanche (le 29 février 2020 n'est PAS compris dans l'année du 1er mars 2020 au 1er mars 2021)
- 2019 : **vendredi** (le 29 février 2020 est ici)
- 2018 : jeudi
- 2017 : mercredi
- 2016 : mardi
- 2015 : dimanche
- 2014 : samedi
- 2013 : **vendredi**
- 2012 : jeudi
- 2011 : mardi
- 2010 : lundi
- 2009 : dimanche
- 2008 : samedi
- 2007 : jeudi
- 2006 : mercredi
- 2005 : mardi
- 2004 : lundi
- 2003 : samedi
- 2002 : **vendredi**
- 2001 : jeudi

On note que les années 2002, 2013 et 2019 ne sont pas bissextiles, contrairement à 2024, et donc que les jours de janvier et février ne correspondent pas. Il y a donc **3 solutions : 2002, 2013 et 2019.**

10 Une poule matheuse et pondeuse

Quand la poule a compté les 2024 œufs qu'elle avait au départ, elle aura pondus $\frac{2024}{4} = 506$ œufs qui lui resteront à compter. Quand elle aura compté 504 de ces œufs supplémentaires elle aura pondus $\frac{504}{4} = 126$ nouveaux œufs, et il lui en restera $126 + 2 = 128$ à compter. Après avoir compté ces 128 œufs, elle en aura pondus $\frac{128}{4} = 32$ nouveaux qui resteront à compter. Après avoir compté ces 32 œufs, elle en aura pondus $\frac{32}{4} = 8$ nouveaux qui resteront à compter. Après avoir compté ces 8 œufs, elle aura pondus $\frac{8}{4} = 2$ nouveaux œufs qu'elle peut compter sans pondre de nouvel œuf et ainsi finir son tas d'œufs à compter.

En tout, elle aura donc compté $2024 + 506 + 126 + 32 + 8 + 2 = \mathbf{2698}$ œufs.

11 Drôle de calcul

Notons X et Y les deux chiffres cachés. Ainsi la donnée devient

$$\frac{ABBA}{BB} = XYB$$

En multipliant les deux côtés de l'égalité par BB , on obtient

$$ABBA = XYB \times BB$$

En particulier, A est le chiffre des unités de B^2 . On peut donc essayer chaque valeur de B :

- $B = 1 \Rightarrow A = 1$ ce qui est contradictoire, car la donnée spécifie que $A \neq B$.
- $B = 2 \Rightarrow A = 4$. On calcule $ABBA/BB = 4224/22 = 192$. C'est une solution.
- $B = 3 \Rightarrow A = 9$. On calcule $ABBA/BB = 9339/33 = 283$. C'est une solution.
- $B = 4 \Rightarrow A = 6$. On calcule $ABBA/BB = 6446/44 = 146.5$. Ce n'est pas une solution.
- $B = 5 \Rightarrow A = 5$ ce qui est contradictoire car $A \neq B$.
- $B = 6 \Rightarrow A = 6$ ce qui est contradictoire car $A \neq B$.
- $B = 7 \Rightarrow A = 9$. On calcule $ABBA/BB = 9779/77 = 127$. C'est une solution.
- $B = 8 \Rightarrow A = 4$. On calcule $ABBA/BB = 4884/88 = 55.5$. Ce n'est pas une solution.
- $B = 9 \Rightarrow A = 1$. On calcule $ABBA/BB = 1991/99 = 20.\bar{1}$. Ce n'est pas une solution.

Il y a donc **3 solutions** : **4224**, **9339** et **9779**.

12 Les trapèzes de l'année

Appelons $c > 0$ la longueur des cathètes du trapèze et $B > 0$ et $b > 0$ les deux bases avec $b \leq B$.¹ La condition sur le périmètre s'exprime comme

$$2c + B + b = 24$$

1. Un trapèze isocèle est défini comme un trapèze dont les deux cathètes sont isométriques, PAS comme un trapèze dont 2 côtés quelconques sont isométriques. Ces derniers sont plus difficiles à énumérer.

De plus l'inégalité triangulaire pour un trapèze non aplati et non croisé s'exprime par

$$2c + b > B$$

Comme par hypothèse $B \geq b$, on a des bornes pour B :

$$2c + b > B \geq b$$

En substituant $B = 24 - 2c - b$, on obtient

$$2c + b > 24 - 2c - b \geq b$$

En ajoutant b à tous les membres de l'inégalité, on obtient

$$2c + 2b > 24 - 2c \geq 2b$$

Ce qui peut être reformulé en bornes sur b :

$$24 - 2c \geq 2b > 24 - 4c \Leftrightarrow 12 - c \geq b > 12 - 2c$$

Énumérons les trapèzes pour les différentes valeurs de c :

- $c = 1$. On a $11 \geq b > 10$, donc $b = 11$ et $B = 11$, soit un trapèze (qui est un rectangle).
- $c = 2$. On a $10 \geq b > 8$, il y a donc deux cas :
 - $b = 10$ et $B = 10$, un rectangle
 - $b = 9$ et $B = 11$, un trapèze
- $c = 3$. On a $9 \geq b > 6$, il y a donc 3 cas :
 - $b = 9$ et $B = 9$, un rectangle
 - $b = 8$ et $B = 10$, un trapèze
 - $b = 7$ et $B = 11$, un trapèze
- $c = 4$. On a $8 \geq b > 4$, il y a donc 4 cas :
 - $b = 8$ et $B = 8$, un rectangle
 - $b = 7$ et $B = 9$, un trapèze
 - $b = 6$ et $B = 10$, un trapèze
 - $b = 5$ et $B = 11$, un trapèze
- $c = 5$. On a $7 \geq b > 2$, il y a donc 5 cas :
 - $b = 7$ et $B = 7$, un rectangle
 - $b = 6$ et $B = 8$, un trapèze
 - $b = 5$ et $B = 9$, un trapèze
 - $b = 4$ et $B = 10$, un trapèze
 - $b = 3$ et $B = 11$, un trapèze
- $c = 6$. On a $6 \geq b > 0$, il y a donc 6 cas :
 - $b = 6$ et $B = 6$, un carré
 - $b = 5$ et $B = 7$, un trapèze
 - $b = 4$ et $B = 8$, un trapèze
 - $b = 3$ et $B = 9$, un trapèze
 - $b = 2$ et $B = 10$, un trapèze

- $b = 1$ et $B = 11$, un trapèze
- $c = 7$. On a $5 \geq b > 0$, il y a donc 5 cas, dont un déjà compté :
 - $b = 5$ et $B = 5$. C'est le même rectangle que $c = 5$ et $b = B = 7$.
 - $b = 4$ et $B = 6$, un trapèze
 - $b = 3$ et $B = 7$, un trapèze
 - $b = 2$ et $B = 8$, un trapèze
 - $b = 1$ et $B = 9$, un trapèze
- $c = 8$. On a $4 \geq b > 0$, il y a donc 4 cas, dont un déjà compté :
 - $b = 4$ et $B = 4$. C'est le même rectangle que $c = 4$ et $b = B = 8$.
 - $b = 3$ et $B = 5$, un trapèze
 - $b = 2$ et $B = 6$, un trapèze
 - $b = 1$ et $B = 7$, un trapèze
- $c = 9$. On a $3 \geq b > 0$, il y a donc 3 cas, dont un déjà compté :
 - $b = 3$ et $B = 3$. C'est le même rectangle que $c = 3$ et $b = B = 9$.
 - $b = 2$ et $B = 4$, un trapèze
 - $b = 1$ et $B = 5$, un trapèze
- $c = 10$. On a $2 \geq b > 0$, il y a donc 2 cas, dont un déjà compté :
 - $b = 2$ et $B = 2$. C'est le même rectangle que $c = 2$ et $b = B = 10$.
 - $b = 1$ et $B = 3$, un trapèze
- $c = 11$. On a $1 \geq b > 0$ et donc un seul cas, déjà compté : $b = 1 = B$, qui est le même rectangle que $c = 1$ et $b = B = 11$.

De plus grandes valeurs de c ne sont pas possibles, car la somme des cathètes serait supérieure au périmètre. Il y a donc en tout $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = \mathbf{31}$ **trapèzes isocèles différents**.

13 Optimisons...

Tout d'abord, on remarque que les rôles de x , y , et z sont interchangeable et qu'on peut donc sans perte de généralité supposer que $x \leq y \leq z$. On pose ensuite

$$X = 2024 - x$$

$$Y = 2024 - y$$

$$Z = 2024 - z$$

On a donc $X \geq Y \geq Z$, et l'équation s'écrit $XYZ = 6$. Comme x , y , et z sont des entiers, X , Y , et Z sont également des entiers. Les seuls triplets d'entiers positifs dont le produit vaut 6 sont $(3, 2, 1)$ et $(6, 1, 1)$. Cependant, il est possible (et la somme $x + y + z$ sera plus grande dans ce cas) que 2 de ces entiers soient négatifs. On a donc les possibilités :

- $(X, Y, Z) = (3, -1, -2)$ et donc $(x, y, z) = (2021, 2025, 2026)$ et $x + y + z = 6072$.
- $(X, Y, Z) = (2, -1, -3)$ et donc $(x, y, z) = (2022, 2025, 2027)$ et $x + y + z = 6074$.

- $(X, Y, Z) = (1, -2, -3)$ et donc $(x, y, z) = (2023, 2026, 2027)$ et $x + y + z = 6076$.
- $(X, Y, Z) = (6, -1, -1)$ et donc $(x, y, z) = (2018, 2025, 2025)$ et $x + y + z = 6068$.
- $(X, Y, Z) = (1, -1, -6)$ et donc $(x, y, z) = (2023, 2025, 2030)$ et $x + y + z = 6078$.

La plus grande somme possible $x + y + z$ est donc **6078**.

14 Une égalité lumineuse

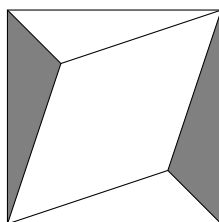
On constate que le chiffre des unités de N^2 est N . Il n'y a que 3 chiffres qui ont cette propriété : 1, 5, et 6. On teste donc pour chacune de ces options :

1. Si $N = 1$, alors $1000 < NEON = (UN)^2 < 2000$ et donc $30 < UN < 50$.
Puisque $N = 1$, on teste $31^2 = 900 + 60 + 1 = 961 < 1000$ et $41^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$. Ainsi $NEON = 1681$ est une solution.
2. Si $N = 5$, alors $5000 < NEON = (UN)^2 < 6000$ et donc $70 < UN < 80$.
Puisque $N = 5$, on teste $75^2 = 4900 + 700 + 25 = 5625$. Ainsi $NEON = 5625$ est une solution.
3. Si $N = 6$, alors $6000 < NEON = (UN)^2 < 7000$ et donc $70 < UN < 90$.
Puisque $N = 6$, on teste $76^2 = 4900 + 840 + 36 = 5776 < 6000$ et $86^2 = 6400 + 960 + 36 = 7396 > 7000$. Il n'y a donc pas de solution pour $N = 6$.

Il ne reste qu'à réordonner les chiffres pour obtenir la valeur de ONE à partir de $NEON$. Les valeurs possibles de ONE sont donc **816** et **256** et il y a **2 solutions**.

15 Mosaïques

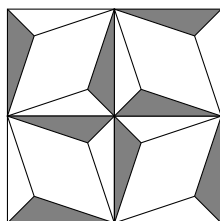
On commence avec un des petits carrés du centre :



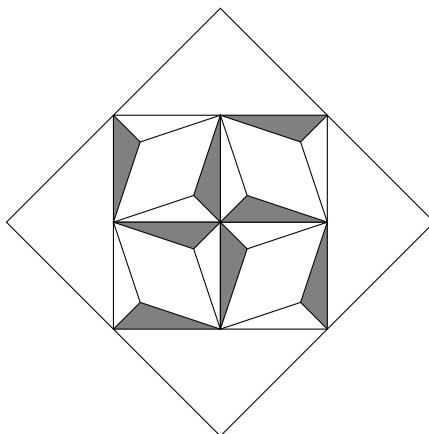
Le losange et le carré partagent leur grande diagonale, et la petite diagonale du losange est égale à la moitié de la diagonale du carré. Puisque l'aire d'un losange est proportionnelle au produit de ses diagonales (et qu'un carré est un losange), l'aire du losange est la moitié de celle du carré.

La surface du carré ne composant pas le losange est divisée en quatre triangles isométriques. Appelons a l'aire de chacun de ses triangles. L'aire du losange vaut donc $4A$ et celle du carré complet $8A$, dont $6A$ sont blancs.

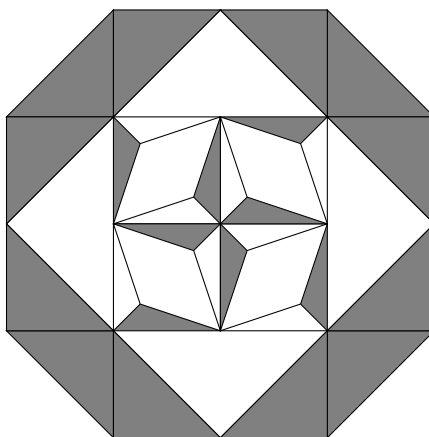
Les quatre petits carrés composant le carré central sont identiques à rotation près. L'aire du carré central représenté ci-dessous est donc de $4 \cdot 8A = 32A$, dont $4 \cdot 6A = 24A$ sont blancs.



Les quatre triangles blancs autour de ce carré ont au total une aire égale à celle du carré (on peut les replier sur le carré). La figure suivante a donc une aire de $2 \cdot 32A = 64A$ dont $24A + 32A = 56A$ sont blancs.



Chacun de ces grands triangles blancs a une aire de $\frac{32A}{4} = 8A$, et chaque petit triangle gris de la bordure a la moitié de cette aire, donc $4A$. Il y a 12 de ces petits triangles, et donc la figure ci-dessous a une aire de $64A + 12 \cdot 4A = 112A$, dont $56A$ sont blancs.



Finalement, les grands triangles gris des coins sont isométriques aux grands triangles blancs et ont donc une aire de $8A$ chacun. La figure complète a donc une aire de $112A + 4 \cdot 8A = 112A + 32A = 144A$, dont $56A$ sont blancs.

La proportion de surface blanche est donc donnée par

$$\frac{56A}{144A} = \frac{56}{144} = \frac{7}{18}$$

16 Pyramide de cubes

Le n -ième étage de la pyramide contient n^2 cubes. Les nombres de cubes de chaque couleur utilisés sont donc les sommes des premiers carrés pairs et impairs :

$$e_n = \sum_{i=1}^n (2i)^2$$

$$o_n = \sum_{i=1}^n (2i-1)^2$$

Il existe des méthodes systématiques pour trouver une expression générale de ces sommes, mais on peut gagner beaucoup de temps en sachant quelques résultats par cœur. Le premier est très connu, les suivants moins, mais ils sont très commodes :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

En repartant du deuxième résultat, on obtient

$$e_n = 4 \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\begin{aligned} o_n &= \left(\sum_{i=1}^{2n} i^2 \right) - e_n = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{n(2n+1)(4n+1-2(n+1))}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \end{aligned}$$

En première approximation, ces deux sommes sont proches de $\frac{4n^3}{3}$. Comme l'une doit valoir 2024, on peut chercher n tel que $\frac{4n^3}{3} \approx 2024$, c'est-à-dire $n^3 \approx 1518$. Comme $11^3 = 1331$ et $12^3 = 1728$, on essaie de calculer $e_{11} = 2024$ et $o_{11} = 1771$. On en déduit que les étages pairs sont orange et qu'il y en a 11. Les étages impairs sont verts, il y en a aussi 11 et il a fallu 1771 cubes pour les construire. Il reste donc $2024 - 1771 = \mathbf{253}$ cubes verts.

17 Jeu de billes

On note b le nombre de billes bleues, r celui de billes rouges et $n = b + r$ le nombre total de billes. Pour tirer la première bille il y a n possibilités. Il reste ensuite $n - 1$ billes dans le sac pour tirer la deuxième. Le nombre de tirages différents est donc $n(n - 1)$. Blandine gagne si les deux billes ne sont pas de la même couleur. Cela se produit si la première bille tirée est l'une des b billes

bleues et la deuxième est l'une des r billes rouges, ou alors si la première bille tirée est l'une des r billes rouges et la deuxième est l'une des b billes bleues. Il y a donc $br + rb = 2br$ tirages différents qui font gagner Blandine. La probabilité que Blandine gagne est donc de

$$\frac{2rb}{n(n-1)}$$

Puisque le jeu est équilibré, cette probabilité vaut $\frac{1}{2}$, et donc

$$4rb = n(n-1)$$

On peut reformuler l'équation précédente ainsi :

$$\begin{aligned} 4rb &= (r+b)^2 - n \\ n &= (r+b)^2 - 4rb \\ n &= (r-b)^2 \end{aligned}$$

On voit en particulier que le nombre total de billes n doit être un carré, le carré de la différence entre r et b . L'ensemble des solutions est maintenant très facile à trouver : il ne peut y avoir de solutions que pour $|r-b| = 2, 3$ ou 4 . On vérifie facilement que ces trois cas donnent des solutions valides (car la somme et la différence ont la même parité).

On trouve donc **3** solutions : **4**, **9**, et **16**.

18 Un nombre bien mystérieux

Soient a, b, c , et d les quatre chiffres du nombre cherché n de sorte que $a \geq b \geq c \geq d$. On note $f(a, b, c, d) = (a+b+c+d) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

On note d'abord que si a', b', c' , et d' sont tels que $a' \geq a, b' \geq b, c' \geq c$, et $d' \geq d$, alors $f(a', b', c', d') \geq f(a, b, c, d)$.

On cherche les valeurs maximales et minimales de a . On note que

$$f(7, 0, 0, 0) = 7 \cdot 49^2 = 7 \cdot 2401 = 16807$$

. Comme n n'a que 4 chiffres, on doit donc avoir $a < 7$. Mais on a donc $7 > a \geq b \geq c \geq d$ donc $n \leq 6666$.

On voit ensuite que $f(6, 0, 0, 0) = 6 \cdot 36^2 = 7776 > 6666$. Ainsi $a < 6$ et $n \leq 5555$.

Inversement, on note que $f(1, 1, 1, 1) = 4 \cdot 4^2 = 64$. Comme n a quatre chiffres, on a donc que $a > 1$. On teste ensuite les valeurs restantes :

- Supposons que $a = 5$. $f(5, 0, 0, 0) = 5 \cdot 25^2 = 3125$ et donc $3125 < n \leq 5555$. On note ensuite que $f(5, 2, 0, 0) = 7 \cdot 29^2 = 5887 > n$. Ainsi $b = 1$ et donc $5100 < n < 5111$.
 $f(5, 1, 0, 0) = 6 \cdot 26^2 = 4056 < n$.
 $f(5, 1, 1, 0) = 7 \cdot 27^2 = 5103$ qui n'est pas une solution.
 $f(5, 1, 1, 1) = 8 \cdot 28^2 = 6272 > n$.
Ainsi il n'y a pas de solution pour $a = 5$.

- Supposons que $a = 4$. $f(4, 0, 0, 0) = 4 \cdot 16^2 = 1024$, et on a donc $1024 < n \leq 4444$. On voit que $f(4, 4, 0, 0) = 8 \cdot 32^2 = 8192 > n$ et donc $b < 4$, et $1024 < n \leq 4333$.
On voit que $f(4, 3, 0, 0) = 7 \cdot 25^2 = 4375 > n$. Ainsi $b < 3$ et $1024 < n \leq 4222$.
 - Supposons que $b = 2$. On calcule $f(4, 2, 0, 0) = 6 \cdot 20^2 = \mathbf{2400}$. On a trouvé une solution. On cherche les éventuelles autres solutions avec $(a, b) = (4, 2)$. On a pour celles-ci $2400 < n \leq 4222$.
 $f(4, 2, 2, 0) = 8 \cdot 24^2 = 4608 > n$ et donc $c = 1$.
 $f(4, 2, 1, 1) = 8 \cdot 22^2 = 3872$ n'est pas une solution.
 $f(4, 2, 1, 0) = 7 \cdot 21^2 = 3087$ n'est pas non plus une solution, la seule solution pour $(a, b) = (4, 2)$ est $n = 2400$.
 - Supposons que $b = 1$. On a $f(4, 1, 1, 1) = 7 \cdot 19^2 = 2527$. Donc $1024 < n < 2527$. Mais comme n n'a par hypothèse pas de chiffre entre 1 et 4, cela implique $1040 \leq n \leq 1411$. On voit ensuite que $f(4, 1, 0, 0) = 5 \cdot 17^2 = 1445 > 1411 \geq n$. Il n'y a donc pas de solution avec $(a, b) = (4, 1)$.
 - Si $b = 0$, alors $c = d = 0$ et on a déjà vu que $f(4, 0, 0, 0) = 1024$ n'est pas une solution.
 - Supposons que $a = 3$. On note que $f(3, 1, 1, 1) = 6 \cdot 12^2 = 864 < 1000 \leq n$. Donc $n \leq b \leq 3$.
 - Supposons que $b = 3$. On calcule $f(3, 3, 0, 0) = 6 \cdot 18^2 = 1944$. Comme n n'a pas de chiffre plus grand que 3, on a donc $2033 \leq n \leq 3333$.
 $f(3, 3, 2, 0) = 8 \cdot 22^2 = 3872 > n$, donc $0 < c < 2$ et donc $c = 1$.
 $f(3, 3, 1, 1) = 8 \cdot 20^2 = 3200$ n'est pas une solution.
 $f(3, 3, 1, 0) = 7 \cdot 19^2 = 2527$ n'est pas une solution. Il n'y a donc pas de solution pour $a = b = 3$.
 - Supposons que $b = 2$. On a donc $1023 \leq n \leq 3222$.
 $f(3, 2, 0, 0) = 5 \cdot 13^2 = 845$ n'est pas une solution.
 $f(3, 2, 1, 0) = 6 \cdot 14^2 = 1176$ n'est pas une solution.
 $f(3, 2, 1, 1) = 7 \cdot 15^2 = 1575$ n'est pas une solution.
 $f(3, 2, 2, 0) = 7 \cdot 17^2 = \mathbf{2023}$ est une solution.
 $f(3, 2, 2, 1) = 8 \cdot 18^2 = 2592$ n'est pas une solution.
 $f(3, 2, 2, 2) = 9 \cdot 21^2 = 3969$ n'est pas une solution.
 - Supposons que $a = 2$. On a $f(2, 1, 1, 1) = 5 \cdot 7^2 = 245 < 1000 \leq n$, et donc $1 < b \leq 2$, donc $b = 2$.
 $f(2, 2, 1, 1) = 6 \cdot 10^2 = 600 < 1000 \leq n$, et donc $1 < c \leq 2$ et donc $c = 2$.
 $f(2, 2, 2, 0) = 6 \cdot 12^2 = 864$ n'est pas une solution.
 $f(2, 2, 2, 1) = 7 \cdot 13^2 = 1183$ n'est pas une solution.
 $f(2, 2, 2, 2) = 8 \cdot 16^2 = 2048$ n'est pas une solution.
 Il n'y a donc pas de solution pour $a = 2$.
- Il y a donc **2** solutions : $n = \mathbf{2400}$ et $n = \mathbf{2023}$.

Note Durant l'énumération, il est intéressant de créer une liste des carrés du deuxième terme sur une feuille séparée pour retrouver rapidement les calculs déjà effectués.